https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p007-024

Investigando perímetros e áreas de retângulos construídos a partir do papagaio no GeoGebra

Investigating perimeters and areas of rectangles constructed from the kite in GeoGebra

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[1]
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X

RESUMO

Neste artigo, estuda-se a definição e construção do quadrilátero papagaio e investigam-se relações entre perímetros e áreas do papagaio e de retângulos construídos a partir de pontos resultantes da divisão dos lados do papagaio em partes iguais. No estudo, recorreu-se ao GeoGebra para construir os quadriláteros e para gerar exemplos que permitiram identificar invariantes, posteriormente provados por processos analíticos. Deste modo, adotando uma vertente experimental e uma vertente analítica na atividade investigativa, constatou-se que o GeoGebra revelou um grande potencial ao nível de descobrir invariantes nas relações entre perímetros e áreas, que conduziram a estabelecer conjeturas, depois confirmadas por meios analíticos. Além disso, tanto na atividade de construção dos quadriláteros como na pesquisa de relações entre perímetros e áreas, foi notória a mobilização de variados conteúdos e conceitos, destacando uma aprendizagem de síntese e relacional. Assim, recomenda-se a exploração de tarefas deste tipo com alunos.

Palavras-chave: *papagaio; retângulo; perímetro; área; GeoGebra*.

ABSTRACT

In this article we study the definition and construction of the kite quadrilateral and investigate relationships between perimeters and areas of the kite and rectangles constructed from points resulting from the division of the sides of the kite into equal parts. In the study, GeoGebra was used to construct the quadrilaterals and to generate examples that allowed the identification of invariants, later proven by analytical processes. Thus, adopting an experimental and an analytical approach in the investigative activity, it was found that GeoGebra revealed great potential in terms of discovering invariants in the relationships between perimeters and areas, which led to the establishment of conjectures, later confirmed by analytical means. Furthermore, both in the activity of constructing quadrilaterals and in researching relationships between perimeters and areas, the mobilization of varied contents and concepts was notable, highlighting a synthetic and relational learning. Therefore, it is recommended to explore tasks of this type with students.

Keywords: *kite; rectangle; perimeter; area; GeoGebra*.

[1] Universidade do Minho – jfernandes@ie.uminho.pt

Introdução

Em Portugal, apesar de se ter verificado antes uma utilização pontual dos computadores a partir do Ensino Assistido por Computador, a introdução mais sistemática das tecnologias digitais no ensino da matemática aconteceu por volta dos anos de 1980 (Fernandes & Viseu, 2006). Em consequência, a partir da década de 1990, o uso dessas tecnologias passou a ser incluído nos programas escolares portugueses, sendo que a sua influência no ensino da matemática não mais deixou de aumentar. É assim que nos programas escolares portugueses atuais de matemática (Ministério da Educação, 2021, 2023) se advoga o uso das tecnologias digitais no ensino da matemática, tal como acontece em muitos outros países (e.g., Brasil, 2018).

De entre as várias ferramentas disponíveis nas tecnologias digitais, destacam-se os Ambientes Geométricos Dinâmicos, sendo o GeoGebra um caso particular. Esses ambientes apresentam grandes potencialidades educativas ao permitirem gerar rapidamente muitos exemplos, identificar invariantes com base nos exemplos e, assim, formular conjeturas que, em geral, devem ser demonstradas por processos analíticos (Junqueira, 1996). O GeoGebra, que é o software que vai ser usado no presente estudo, não se limita apenas à Geometria, podendo também ser usado em Cálculo, Álgebra e Estatística.

Por outro lado, as investigações matemáticas, que constituem um tipo de tarefa com um grande grau de abertura e um elevado grau de desafio (Ponte, 2005), têm sido cada vez mais preconizadas no ensino e na aprendizagem da matemática, naturalmente condicionada à formação matemática dos alunos. Nesse sentido, Ponte (2003) esclarece a noção de atividade investigativa, dizendo que,

> Em contextos de ensino, aprendizagem ou formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. (p. 94)

Num estudo recente, Fernandes (2023) explorou uma investigação sobre a possibilidade de construir um *bissetogramo*[2] nos diferentes tipos de quadriláteros e, no caso de ser possível, caracterizar o bissetogramo obtido. Nesse estudo, o GeoGebra mostrou ser um software com potencialidades para explorar a

[2] O *bissetogramo* é o quadrilátero definido pelas bissetrizes dos ângulos internos de um dado quadrilátero. Trata-se, portanto, de um novo quadrilátero que nem sempre é possível construir em qualquer tipo de quadrilátero dado.

investigação matemática, designadamente na construção dos quadriláteros, na criação de vários exemplos e na formulação de conjeturas, posteriormente provadas por processos analíticos.

Neste contexto, no presente artigo explora-se uma tarefa de investigação matemática sobre a existência de possíveis relações de perímetros e áreas entre o papagaio e retângulos construídos a partir de pontos resultantes da divisão dos lados do papagaio em partes iguais, recorrendo ao software GeoGebra e a processos analíticos. Nessa exploração, começa-se por construir os papagaios e os respetivos retângulos no GeoGebra, geram-se e analisam-se vários exemplos no sentido de identificar invariantes, que conduzem à formulação de conjeturas, e, por último, demonstrar as conjeturas por processos analíticos.

Finalizada a seção de introdução, onde se enuncia a problemática e justifica a importância do estudo, segue-se a seção do referencial teórico, onde se revê e discute a problemática dos tipos de tarefas de ensino e, mais aprofundadamente, as tarefas de investigação matemática. Na seção seguinte explora-se, com o GeoGebra, a construção de retângulos construídos a partir do papagaio, determinando-se os seus perímetros ou as suas áreas tendo em vista formular e provar conjeturas. Por fim, na última seção sintetizam-se as principais conclusões e implicações do estudo.

1. Referencial teórico

No referencial teórico trata-se a problemática das tarefas matemáticas, que se desenvolve em duas subseções: na primeira subseção abordam-se os diferentes tipos de tarefas e a segunda subseção foca-se nas tarefas de investigação.

1.1. Tipos de tarefas

Inicialmente, distingue-se entre tarefa de ensino e atividade de aprendizagem. As tarefas de ensino precedem a atividade de aprendizagem, constituindo o ponto de partida da atividade. Portanto, as tarefas desencadeiam a atividade dos aprendizes, atividade que, por sua vez, condiciona a aprendizagem. Assim, quando o aprendiz desenvolve uma atividade, ele está a resolver uma certa tarefa, sendo que a resolução da tarefa é o objetivo da atividade.

Uma tarefa pode ter origem em diferentes agentes do processo de ensino-aprendizagem: no professor, que a propõe ao aluno; no próprio aluno ou de alguma negociação entre o aluno e o professor. Outra característica das tarefas é que elas podem ser enunciadas explicitamente no início da sua exploração ou, diferentemente, estabelecidas de modo implícito, tornando-se explícitas à medida que a sua exploração vai sendo desenvolvida.

O fato da atividade a realizar estar mais ou menos explícita nos enunciados das tarefas traduz o seu *grau de abertura*. A este propósito, Ponte (2005) classifica as tarefas num contínuo entre tarefas fechadas (reduzido grau de abertura) e tarefas abertas (elevado grau de abertura). Nas tarefas fechadas, o autor inclui os exercícios e problemas e nas tarefas abertas inclui as explorações e as investigações.

Ainda segundo Ponte (2005), as tarefas também podem ser classificadas quanto ao *grau de desafio*, isto é, ao nível de dificuldade envolvido na sua resolução. Neste caso, o autor classifica-as num contínuo entre tarefas de baixo grau de dificuldade (reduzido grau de desafio) e tarefas de elevado grau de dificuldade (elevado grau de desafio). Nas tarefas de grau de desafio reduzido o autor inclui os exercícios e as explorações e nas tarefas de desafio elevado inclui os problemas e as investigações.

Considerando simultaneamente os dois atributos aplicados anteriormente na classificação das tarefas, o grau de abertura e o grau de desafio, conclui-se que nos *exercícios* se indica claramente o que é dado e o que é pedido, assumindo-se, portanto, como enunciados fechados. Por outro lado, este tipo de tarefa apresenta um baixo nível de dificuldade, permitindo ao aluno aplicar os conhecimentos adquiridos, exercitando-os e consolidando-os. Embora os exercícios tenham o seu próprio lugar no ensino da matemática, a redução do ensino da matemática à resolução de exercícios diminui o grau de desafio com que se confrontam os alunos e podem desmotivá-los.

Já os *problemas* são tarefas que envolvem sempre um grau de dificuldade considerável. Segundo Pólya (1986), um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que lhe permita a sua resolução imediata. Tal como nos exercícios, no enunciado dos problemas indica-se claramente o que é dado e o que é pedido, sendo a sua solução, antecipadamente, do conhecimento do professor, o que lhe permite decidir se a resposta do aluno está certa ou errada. Apesar dos problemas desempenharem um papel fundamental no ensino da matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), é necessário ter alguns cuidados ao propor esse tipo de tarefas: o nível de dificuldade do problema não deve ser demasiado elevado, pois nesse caso o aluno desiste simplesmente de o resolver, desistindo da atividade de resolução; nem demasiado acessível, pois nesse caso deixa de ser um problema e transforma-se num exercício.

As *investigações* apresentam um grau de abertura elevado, em que nem tudo está explícito nos seus enunciados, e um grau de desafio também elevado. Neste tipo de tarefa requer-se que os alunos assumam um papel semelhante ao de um investigador, naturalmente tendo por referência o seu conhecimento no domínio em que a pesquisa se desenvolve. Na sua realização, parte-se da formulação de questões de investigação, que podem ser propostas pelos alunos, pelo professor ou resultarem da negociação entre ambos, a que se procura responder. No processo investigativo, os alunos devem explorar, conjeturar, procurar regularidades, estabelecer conjeturas e apresentar as conclusões obtidas na forma verbal. Tal como os problemas, sendo de grande relevância no ensino da matemática, as investigações requerem um maior envolvimento dos alunos ao demandarem a sua participação desde o princípio do processo investigativo.

Tal como as investigações, as *explorações* são tarefas abertas, mas com um menor grau de dificuldade. Assim, a diferença entre as investigações e as explorações reside no grau de desafio, que é menor nas explorações. Por outro lado, as explorações requerem pouco planeamento em comparação com as investigações. Já entre os exercícios e as explorações a distinção, por vezes, não é muito clara, pois um mesmo enunciado pode constituir um exercício ou uma exploração, dependendo dos conhecimentos prévios dos alunos. Nesta situação, caso o aluno não disponha de todos os conhecimentos requeridos para a resolução da exploração, ele poderá recorrer às suas intuições.

Por fim, referem-se outros dois tipos de tarefas: os projetos e as simulações. Os *projetos* são tarefas em que se destaca o contexto e cuja realização decorre durante um tempo considerável. Portanto, os projetos são tarefas de longa duração que partilham muitas das características das investigações e permitem efetuar sínteses das aprendizagens. Segundo Batanero et al. (2011), o ensino com base em projetos relaciona a matemática com as suas aplicações, promove a motivação dos alunos e salienta o contexto e a natureza realista das tarefas. Embora os projetos proporcionem aprendizagens variadas e significativas, o longo tempo em que decorre a sua realização pode desorientar os alunos nos seus percursos de resolução e, consequentemente, levá-los a perder o interesse ou mesmo a desistir da tarefa.

Já as *simulações* são tarefas que se relacionam com contextos da realidade. Geralmente, as simulações são tarefas problemáticas e desafiantes e podem ser problemas ou investigações consoante o seu grau de estruturação. A importância deste tipo de tarefas decorre do fato de permitirem estabelecer uma ponte entre a realidade e a modelação matemática (Burrill, 2002).

1.2. Investigações

Os alunos ao realizarem tarefas de investigação têm a oportunidade de experienciar uma atividade semelhante à dos matemáticos e o prazer da descoberta. Recentemente, essas potencialidades das tarefas investigativas têm vindo a ser reconhecidas, verificando-se mesmo a sua introdução nos currículos escolares de matemática (Ministério da Educação, 2021, 2023; Brasil, 2018).

Abrantes et al. (1999) defendem a introdução das investigações na sala de aula, apontando as seguintes razões: constituem uma parte essencial do trabalho em matemática e lidam com o essencial da atividade matemática (formular e resolver problemas, explorar hipóteses, formular e testar conjeturas, generalizar e provar resultados); favorecem o envolvimento do aluno no trabalho que realiza na aula de matemática, sem o qual será difícil para o aluno realizar uma aprendizagem significativa; podem ser abordadas e desenvolvidas de vários modos e com diferentes graus de profundidade; estimulam um pensamento globalizante, envolvendo o relacionamento de diversos tópicos; podem ser inseridas em qualquer parte do currículo, acentuando um caráter transversal da disciplina de Matemática; e reforçam as aprendizagens mais elementares, ao mesmo tempo que envolvem aspetos complexos do pensamento.

Contudo, apesar do reconhecimento das potencialidades das investigações, existem ainda obstáculos à sua introdução no currículo e, principalmente, à sua exploração na sala de aula, como sejam: uma interpretação restritiva do texto curricular por parte da maior parte dos manuais escolares; pressões do próprio sistema educativo (exames, referências nucleares de aprendizagem); pouca flexibilidade (em tempo e conteúdos) dos currículos atuais; extensão dos programas e diferente estruturação das atividades de investigação; as atividades de investigação pressupõem uma ligação entre variados conteúdos matemáticos; uma visão rígida e absoluta da matemática; e dificuldades dos professores em articular este tipo de atividades e os conteúdos programáticos.

Segundo Ponte (2003), numa investigação matemática, parte-se de uma questão geral ou de informação pouco estruturada, da qual se procura formular uma questão mais específica e desta derivar diversas conjeturas. Depois, testam-se essas conjeturas, algumas das quais poderão ser desde logo rejeitadas com base em contraexemplos, enquanto outras, não se revelando inteiramente corretas, poderão ser aperfeiçoadas. Assim, nesse processo, novas questões são formuladas, e as questões iniciais podem ser parcial ou totalmente abandonadas. Finalmente, as conjeturas que resistem aos vários testes tornam-se credíveis e estimulam a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática.

De seguida referem-se alguns estudos em que foram exploradas investigações matemáticas. No estudo de Segurado (2002) participaram os alunos de uma turma que frequentavam o 6.º ano pela primeira vez. Organizados em pequenos grupos, os alunos exploraram, sequencialmente, quatro tarefas investigativas sobre números. Em termos de resultados, a autora concluiu que o desempenho dos alunos na atividade investigativa foi melhorando com o progresso na exploração das tarefas. Deste modo, na última tarefa, os alunos aperceberam-se da importância da organização dos dados, da procura de regularidades e padrões, da formulação de conjeturas e sua validação a partir de exemplos e da necessidade de justificar e argumentar para defender as suas opiniões. Por último, o empenho de alguns alunos, vistos como mais fracos, salientou-se neste tipo de tarefa, particularmente quando não era necessária uma grande bagagem matemática para descobrirem relações entre números.

Já no estudo de Rocha (2002) participaram os alunos de uma turma do 7.º ano, dos quais cerca de metade estava a repetir o 7.º ano ou tinha repetido anos anteriores. Também organizados em pequenos grupos, os alunos exploraram cinco tarefas sobre números, das quais apenas três são relatadas no estudo. Dos resultados do estudo, evidencia-se o progresso dos alunos na atividade investigativa à medida que prosseguiram na exploração das atividades de investigação, designadamente na procura de padrões e regularidades, e na formulação de questões e conjeturas. A autora concluiu, ainda, que os alunos desenvolveram alguma autonomia no trabalho investigativo, melhoraram o modo de trabalhar em grupo e as formas de comunicar as suas ideias, seja oralmente ou por escrito. Por fim, destaca-se que os alunos se sentiram mais à vontade nas tarefas em que não se requeriam pré-requisitos de anos anteriores, especialmente de conteúdos matemáticos fundamentais para a exploração das tarefas.

Para Batanero (2001), na concretização de uma investigação estatística, os alunos utilizam metodologias quantitativas, integrando a linguagem e os métodos estatísticos num processo mais global de investigação. Neste âmbito, Sousa (2002) implementou uma investigação estatística com os alunos de uma turma do 6.º ano, com idades entre 11 e 12 anos, organizados em pequenos grupos. Esses alunos já possuíam experiência prévia em trabalho em grupo e em investigações matemáticas. Na realização da investigação "Como é o aluno típico da minha turma", segundo a autora, os alunos assumiram um papel ativo, manifestaram-se agradados com a atividade, trabalharam conteúdos dos temas "Estatística" e "Números e Cálculo" e promoveram a interdisciplinaridade e hábitos de reflexão e capacidade crítica. Como conclusão final, a autora refere: “[…] penso que as investigações estatísticas constituem um tipo de experiência de aprendizagem que contribui para que os alunos desenvolvam a capacidade de ler e interpretar a realidade, descentrando-se da sua própria imagem […]” (Sousa, 2002, p. 95).

Também em Estatística, Fernandes et al. (2009) conduziram um estudo com os alunos de uma turma do ensino profissional, organizados em grupos e sendo que a maioria deles apresentava uma ou mais repetências no seu percurso escolar. Os grupos realizaram investigações estatísticas ao longo de doze aulas, abordando diversos temas ligados ao desporto e a hábitos alimentares e tabágicos.

Considerando que eram alunos com muitas dificuldades em matemática, os autores concluíram que os resultados foram satisfatórios e salientaram que todos eles concluíram a unidade de Estatística, contrariamente ao que aconteceu noutras unidades temáticas. Adicionalmente, na realização das investigações, os alunos valorizaram a metodologia adotada, designadamente, o uso da folha de cálculo, o trabalho de grupo, o interesse da Estatística para as suas vidas, a forma de aprender Estatística e a argumentação.

Por fim, Pereira et al. (2016) conduziram um estudo com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, portanto, futuros professores de matemática. Nesse estudo, explorou-se uma tarefa investigativa envolvendo transformações da função cosseno do tipo $f(x) = A + Bcos(mx)$. Com auxílio do software GeoGebra, variando os parâmetros A, B e m da função cosseno, os estudantes deviam reconhecer e caracterizar o comportamento do gráfico da função. Em termos de resultados, segundo os autores, o uso do GeoGebra potencializou o processo de investigação matemática, assim como a possibilidade de mostrar aos alunos que a investigação permite identificar propriedades matemáticas implicadas na tarefa. Assim, em geral, o uso do software contribuiu para a formação inicial dos professores, para a construção do seu conhecimento, para a predisposição da realização das atividades e para uma visão crítica do ensino e aprendizagem.

2. Explorar propriedades do papagaio com o GeoGebra

Nesta secção, pesquisam-se propriedades envolvendo o quadrilátero papagaio, explorando-se a sua definição e construção, bem como relações de perímetros e áreas entre o papagaio e retângulos construídos a partir de pontos resultantes da divisão dos lados do papagaio em partes iguais.

2.1. Definição e construção do papagaio

A definição do papagaio, ou de qualquer outro quadrilátero, depende dos atributos a que recorremos, os quais podem referir-se a propriedades dos lados, das diagonais ou dos ângulos.

No caso dos *atributos dos lados*, o papagaio pode definir-se como *um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos congruentes*. Na Figura 1 apresenta-se a construção do papagaio a partir dos atributos dos lados.

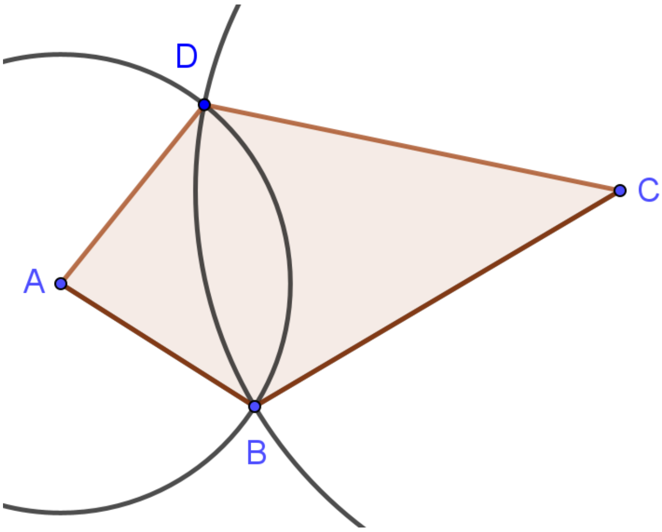

FIGURA 1: Construção do papagaio a partir dos atributos dos lados
FONTE: Elaboração do autor

Na construção do papagaio, contruiu-se primeiramente os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$, lados do quadrilátero, de qualquer comprimento. De seguida, construiu-se a circunferência de centro A e raio $[AB]$ e a circunferência de centro C e raio $[BC]$, cuja interseção define os pontos B e D. Deste modo, garantiu-se que $[AB] \cong [AD]$ e $[BC] \cong [CD]$, o que significa que o quadrilátero $[ABCD]$ tem dois pares de lados consecutivos congruentes, tratando-se, portanto, de um papagaio.

No caso dos *atributos das diagonais*, o papagaio define-se como sendo *um quadrilátero com as diagonais perpendiculares e em que pelo menos uma delas bisseta a outra.* Na Figura 2 apresenta-se a construção do papagaio a partir dos atributos das diagonais.

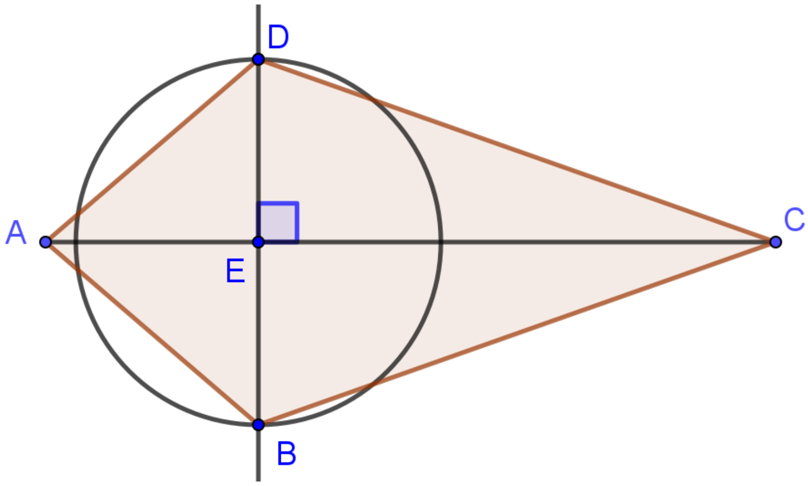

FIGURA 2: Construção do papagaio a partir dos atributos das diagonais
FONTE: Elaboração do autor

Na construção do papagaio, definiu-se, em primeiro lugar, uma das suas diagonais, concretamente a diagonal $[AC]$, de comprimento arbitrário. Seguidamente, definiu-se o ponto E sobre a diagonal antes construída e por ele conduziu-se uma reta perpendicular à diagonal $[AC]$, garantindo, assim, a perpendicularidade das diagonais. Por último, construiu-se uma circunferência de centro em E e raio qualquer, o que implica que a diagonal $[AC]$ bisseta a diagonal $[BD]$. Portanto, porque as diagonais são perpendiculares e pelo menos uma delas bisseta a outra, conclui-se que o quadrilátero $[ABCD]$ é um papagaio.

Por último, no caso dos *atributos dos ângulos*, o papagaio pode definir-se como sendo *um quadrilátero em que uma das suas diagonais é a bissetriz de dois dos seus ângulos opostos*. Na Figura 3 mostra-se a construção do papagaio a partir dos atributos dos ângulos.

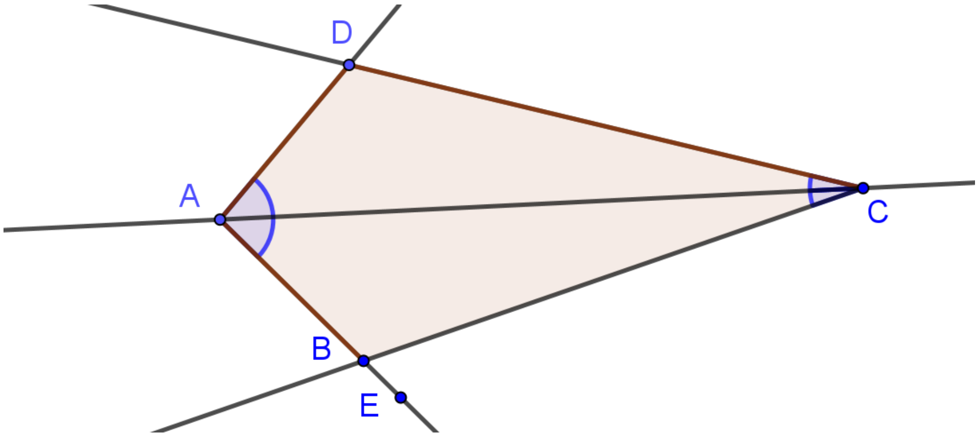

FIGURA 3: Construção do papagaio a partir dos atributos dos ângulos
FONTE: Elaboração do autor

Na construção do papagaio, começou-se por definir o $\angle EAD$ e, de seguida, definiu-se a sua bissetriz, representada na figura pela semirreta $\dot{A}C$. Posteriormente, considerando o ponto C sobre a bissetriz, definiu-se o $\angle DCA$, Por fim, definiu-se o $\angle ACB$, congruente com o $\angle DCA$, definindo-se, assim, o ponto B. Logo, como a diagonal $[AC]$ é a bissetriz dos ângulos opostos $\angle BAD$ e $\angle DCB$, conclui-se que o quadrilátero $[ABCD]$ é um papagaio.

Em qualquer das três situações estudadas antes construiu-se um papagaio que é um quadrilátero não trapézio. Contudo, o papagaio também pode ser um losango ou um quadrado, pois cada um destes dois quadriláteros cumprem qualquer uma das três definições antes referidas. No caso do losango, os lados são todos congruentes, as diagonais são perpendiculares e cada uma delas bisseta a outra e cada diagonal bisseta os ângulos opostos. No que respeita ao quadrado, os lados são todos congruentes, as diagonais são perpendiculares, cada uma bisseta a outra e são congruentes e cada diagonal bisseta os ângulos opostos, que são todos retos.

Logo, pode-se concluir que um papagaio pode ser um não trapézio, um losango ou um quadrado.

2.2. Estudar relações entre perímetros

Depois de construir o papagaio, vamos dividir os seus lados em duas, quatro, oito, … partes iguais. De seguida, com os novos pontos definidos, construiu-se um novo retângulo e relacionou-se o seu perímetro com os comprimentos das diagonais do papagaio.

Na Figura 4 apresenta-se o caso em que os lados do papagaio foram divididos em duas partes iguais.

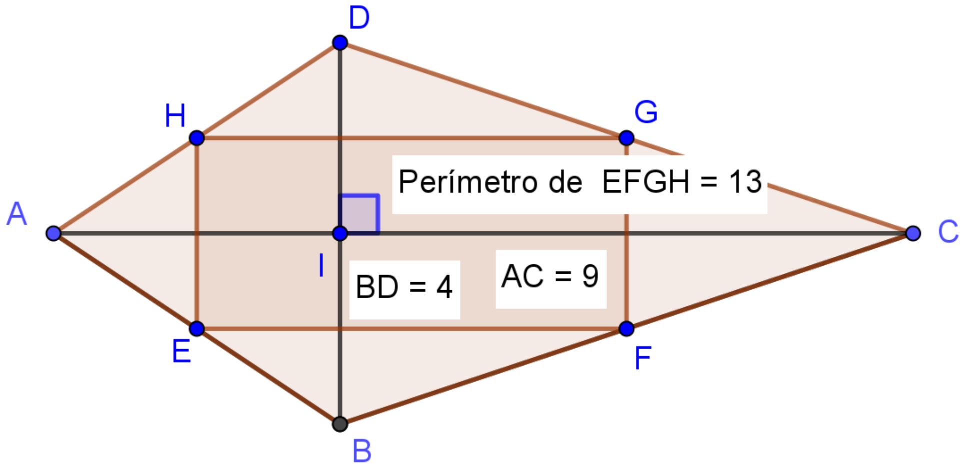

FIGURA 4: Divisão dos lados do papagaio em duas partes iguais
FONTE: Elaboração do autor

A partir dos pontos médios dos lados do papagaio $[ABCD]$, construiu-se o quadrilátero $[EFGH]$, que se demonstra tratar-se de um retângulo, pois os seus lados são paralelos às diagonais do papagaio que, por sua vez, são perpendiculares entre si. Por observação das medições efetuadas no GeoGebra, verifica-se que o perímetro do retângulo (13) é igual à soma $(9+4)$ dos comprimentos das diagonais do papagaio. Arrastando objetos livres da construção, constata-se que essa relação se mantém para outros exemplos.

Em termos analíticos, tem-se que $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ e $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$. Logo, o perímetro de $[EFGH]$ é dado por: $P[EFGH]=2\times\frac{1}{2}\overline{AC}+2\times\frac{1}{2}\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{BD}$, como se pretendia mostrar.

Na Figura 5 apresenta-se o caso em que os lados do papagaio foram divididos em quatro partes iguais.

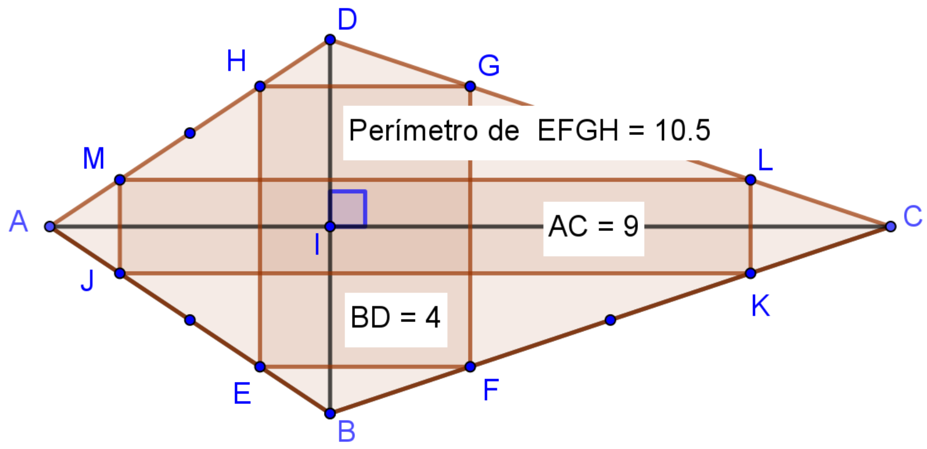

FIGURA 5: Divisão dos lados do papagaio em quatro partes iguais
FONTE: Elaboração do autor

Depois de dividir cada um dos lados do papagaio $[ABCD]$ em quatro partes iguais, definiram-se os retângulos $[EFGH]$ e $[JKLM]$. No caso do retângulo $[EFGH]$, defina-se, na janela de *Entrada* do GeoGebra, a razão entre $\overline{AC} + \overline{BD}$ e o perímetro do retângulo $[EFGH]$, que pode ser escrita assim: $(AC + BD)/$ $perímetro(polígono(E, F, G, H))$. Executado este comando, o valor da razão aparece na folha algébrica do GeoGebra, que deve ser previamente ativada para que o respetivo valor possa ser visualizado. Arrastando objetos livres da figura, para gerar mais exemplos, verifica-se que essa relação varia em função dos exemplos, o que significa que no caso do retângulo $[EFGH]$ não se obteve qualquer invariante. Analogamente, o mesmo se pode concluir no caso do retângulo $[JKLM]$.

Não ter sido observado um invariante para a relação entre a soma dos comprimentos das diagonais do papagaio e o perímetro dos retângulos construídos a partir da divisão dos lados do papagaio em quatro partes iguais, nos vários exemplos estudados, é suficiente para refutar a existência de tal invariante.

Em geral, considere-se o papagaio $[ABCD]$, divida-se cada um dos seus lados em 2^n partes iguais, com $n \in \mathbb{N}$, e definam-se, como no caso anterior, os retângulos $[EFGH]$ e $[JKLM]$, que são àqueles de menor área. No caso do retângulo $[EFGH]$, tem-se que $\overline{EF} = \frac{1}{2^n}\overline{AC}$ e $\overline{EH} = \frac{2^n-1}{2^n}\overline{BD}$, em que $[AC]$ e $[BD]$ são as diagonais do papagaio. Portanto, tem-se para perímetro do retângulo: $2\overline{EF} + 2\overline{EH} = 2 \times \frac{1}{2^n}\overline{AC} + 2 \times \frac{2^n-1}{2^n}\overline{BD} = \frac{1}{2^{n-1}}\overline{AC} + \frac{2^n-1}{2^{n-1}}\overline{BD} = \frac{1}{2^{n-1}}(\overline{AC} + \overline{BD}) + \frac{2^n-2}{2^{n-1}}\overline{BD}$. Analisando a última expressão, verifica-se que o perímetro do retângulo depende apenas da soma $\overline{AC} + \overline{BD}$ quando $\frac{2^n-2}{2^{n-1}}\overline{BD} = 0$, o que corresponde a $n = 1$. Do mesmo modo, poderíamos chegar a uma conclusão semelhante para o caso do retângulo $[JKLM]$.

Na pesquisa efetuada sobre a relação existente entre a soma dos comprimentos das diagonais do papagaio e os perímetros dos retângulos construídos a partir da divisão dos lados do papagaio num número par de partes iguais, conclui-se que tal relação só ocorre quando os lados do papagaio são divididos em duas partes iguais. Neste caso, a soma dos comprimentos das diagonais do papagaio é igual ao perímetro do retângulo construído a partir dos pontos médios dos seus lados.

2.3. Estudar relações entre áreas

Tal como nos perímetros, depois de construir o papagaio, vamos dividir os seus lados em duas, quatro, oito, … partes iguais. Seguidamente, recorrendo aos novos pontos definidos, construiu-se um novo quadrilátero e relacionou-se a sua área com a área do papagaio inicial.

Na Figura 6 apresenta-se o caso em que os lados do papagaio foram divididos em duas partes iguais.

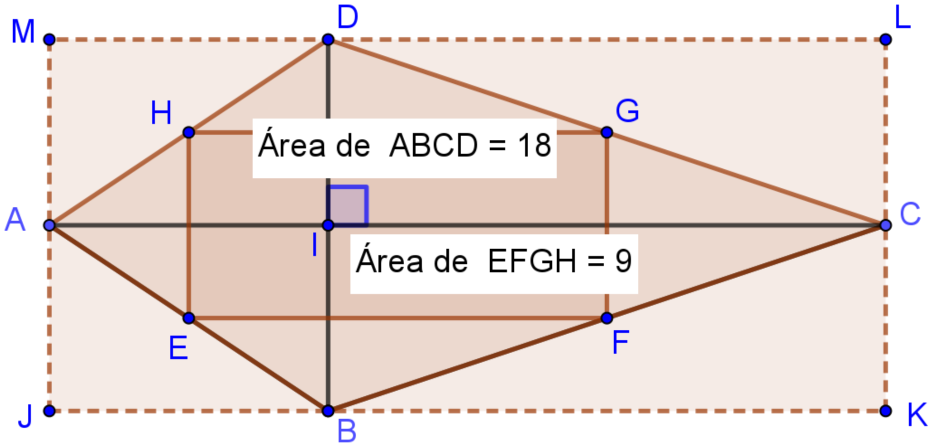

FIGURA 4: Divisão dos lados do papagaio em duas partes iguais
FONTE: Elaboração do autor

A partir dos pontos médios do papagaio $[ABCD]$, construiu-se o quadrilátero $[EFGH]$, que é um retângulo. Por observação das medições efetuadas no GeoGebra, verifica-se que área do retângulo $[EFGH]$ (9) é metade da área do papagaio dado (18). Considerando, agora, a relação entre a área do retângulo $[EFGH]$ e a área do papagaio, que é definida por $área\ (polígono(E,F,G,H))/área(polígono(A,B,C,D))$, obtém-se o valor 0,5. Arrastando objetos livres da construção, constata-se que essa relação se mantém para outros exemplos.

Em termos analíticos, tem-se que $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ e $\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Donde, a $A[EFGH]$ (área de $[EFGH]$), é dada por: $\frac{1}{2}\overline{AC} \times \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{4}\overline{AC} \times \overline{BD}$. Mas $\overline{AC} \times$

$\overline{BD}$ corresponde à área do retângulo $[JKLM]$, que é duas vezes a área do papagaio, ou seja, $2A[ABCD]$. Logo, substituindo na expressão anterior, resulta que: $A[EFGH] = \frac{1}{4} \times 2A[ABCD] = \frac{1}{2}A[ABCD]$, como se pretendia concluir.

Na Figura 7 apresenta-se o caso em que os lados do papagaio foram divididos em quatro partes iguais.

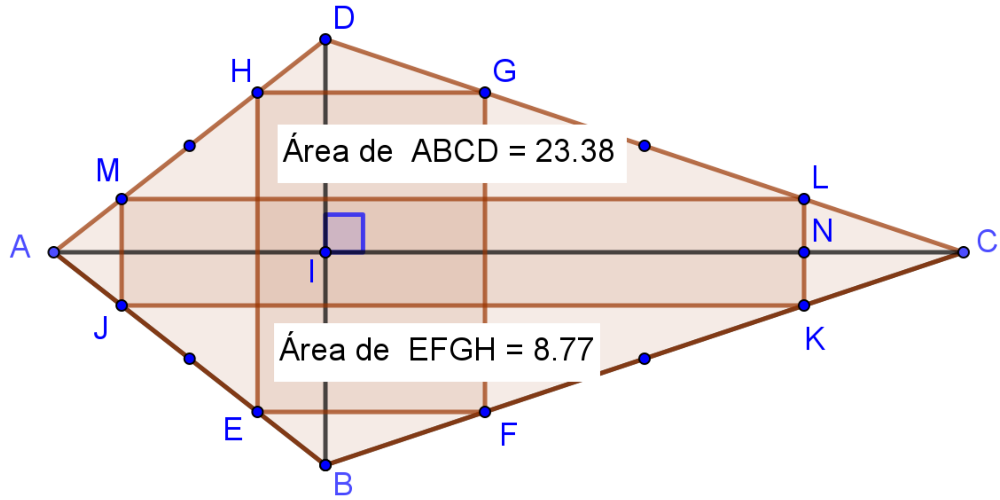

FIGURA 7: Divisão dos lados do papagaio em quatro partes iguais
FONTE: Elaboração do autor

Depois de dividido cada lado do papagaio $[ABCD]$ em quatro partes iguais, construíram-se os quadriláteros $[EFGH]$ e $[JKLM]$, que são ambos retângulos. No caso do retângulo $[EFGH]$, por observação das medições efetuadas no GeoGebra, verifica-se que a área do retângulo $[EFGH]$ (8,77) é cerca de 0,38 vezes a área do papagaio (23,38). Considerando, agora, a relação entre a área do retângulo $[EFGH]$ e a área do papagaio, que é definida por $área\,(polígono(E,F,G,H))/área(polígono(A,B,C,D))$, obtém-se o valor 0,38. Arrastando objetos livres da figura, constata-se que essa relação se mantém para outros exemplos.

Em termos analíticos, tem-se que $\overline{EF} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ e $\overline{EH} = \frac{3}{4}\overline{BD}$. Donde, a $A[EFGH]$ (área de $[EFGH]$), é dada por: $\frac{1}{4}\overline{AC} \times \frac{3}{4}\overline{BD} = \frac{3}{16}\overline{AC} \times \overline{BD}$. Mas $\overline{AC} \times \overline{BD}$ corresponde a duas vezes a área do papagaio, ou seja, $2A[ABCD]$, como vimos antes. Logo, substituindo na expressão anterior, resulta que: $A[EFGH] = \frac{3}{16} \times 2A[ABCD] = \frac{3}{8}A[ABCD]$. Sendo 0,38 um valor aproximado de $\frac{3}{8} = 0{,}375$, conclui-se que se confirma analiticamente o resultado obtido no GeoGebra. Por um processo análogo, podemos verificar que a relação se mantém também para o caso do retângulo $[JKLM]$.

Na Figura 8 apresenta-se o caso em que os lados do papagaio foram divididos em oito partes iguais.

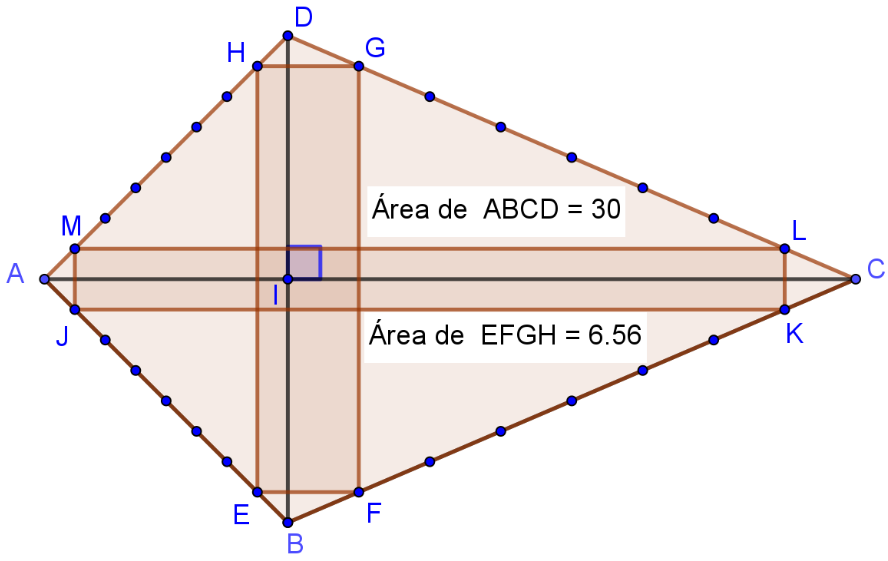

FIGURA 8: Divisão dos lados do papagaio em oito partes iguais
FONTE: Elaboração do autor

Após dividir cada lado do papagaio $[ABCD]$ em oito partes iguais, construíram-se os quadriláteros $[EFGH]$ e $[JKLM]$, que são ambos retângulos. No caso do retângulo $[EFGH]$, por observação das medições efetuadas no GeoGebra, verifica-se que a área do retângulo $[EFGH]$ $(6{,}56)$ é cerca de $0{,}22$ vezes a área do papagaio (30). Considerando, agora, a relação entre a área do retângulo $[EFGH]$ e a área do papagaio, que é definida por $área\,(polígono(E,F,G,H))/$ $área(polígono(A,B,C,D))$, obtém-se o valor $0{,}22$. De seguida, arrastando objetos livres da figura, constata-se que essa relação se mantém para outros exemplos.

Em termos analíticos, tem-se que $\overline{EF}=\frac{1}{8}\overline{AC}$ e $\overline{EH}=\frac{7}{8}\overline{BD}$. Donde, a $A[EFGH]$ (área de $[EFGH]$) é dada por: $\frac{1}{8}\overline{AC}\times\frac{7}{8}\overline{BD}=\frac{7}{64}\overline{AC}\times\overline{BD}$. Mas $\overline{AC}\times\overline{BD}$ corresponde a duas vezes a área do papagaio, ou seja, $2A[ABCD]$, como vimos antes. Logo, substituindo na expressão anterior, resulta que: $A[EFGH]=\frac{7}{64}\times 2A[ABCD]=\frac{7}{32}A[ABCD]$. Sendo $0{,}22$ um valor aproximado de $\frac{7}{32}=0{,}21875$, mostra-se que se confirma analiticamente o resultado obtido no GeoGebra. Por um processo semelhante, podemos verificar que a relação se mantém também para o caso do retângulo $[JKLM]$.

Em geral, considere-se o papagaio $[ABCD]$, divida-se cada um dos seus lados em 2^n partes iguais, com $n\in\mathbb{N}$, e definam-se, como nos casos anteriores, os dois retângulos $[EFGH]$ e $[JKLM]$, que são àqueles de menor área. No caso do retângulo $[EFGH]$, tem-se que $\overline{EF}=\frac{1}{2^n}\overline{AC}$ e $\overline{EH}=\frac{2^n-1}{2^n}\overline{BD}$, em que $[AC]$ e $[BD]$ são as diagonais do papagaio. Portanto, tem-se para área do retângulo: $\overline{EF}\times\overline{EH}=$

$\frac{1}{2^n}\overline{AC} \times \frac{2^n-1}{2^n}\overline{BD} = \frac{2^n-1}{2^{2n}}\overline{AC} \times \overline{BD}$. Por outro lado, como $\overline{AC} \times \overline{BD}$ é o dobro da área do papagaio $[ABCD]$, ou seja, $\overline{AC} \times \overline{BD} = 2A[ABCD]$, vem $A[EFGH] = \frac{2^n-1}{2^{2n}} \times 2A[ABCD] = \frac{2^n-1}{2^{2n-1}} \times A[ABCD]$. Finalmente, a razão entre as áreas dos retângulos $[EFGH]$ e $[ABCD]$ é dada por $\frac{A[EFGH]}{A[ABCD]} = \frac{2^n-1}{2^{2n-1}}$. De modo análogo, poderíamos chegar à mesma conclusão para o caso retângulo $[JKLM]$.

Na pesquisa realizada verifica-se que a relação existente entre as áreas dos retângulos de menor área, construídos a partir da divisão dos lados do papagaio num número par de partes iguais, e do papagaio inicial é dada pelo quociente $\frac{2^n-1}{2^{2n-1}}$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Conclusões e implicações

No presente estudo explorámos a definição e construção de papagaios e pesquisaram-se relações de perímetros e áreas entre um papagaio dado e retângulos construídos a partir de pontos resultantes da divisão dos lados do papagaio em partes iguais, recorrendo ao GeoGebra e a processos analíticos.

Tratando-se de tarefas investigativas (Ponte, 2003, 2005), distinguiram-se no estudo diferenças importantes entre as relações entre perímetros e entre áreas. Assim, após dividir os lados do papagaio em duas, quatro, oito, … partes iguais, verificou-se existir uma relação entre os perímetros apenas quando os lados do papagaio são divididos em duas partes iguais. Já no caso das áreas verificou-se existir uma relação em todas as divisões dos lados do papagaio em duas, quatro, oito, … partes iguais, isto é, 2^n partes iguais. Portanto, as investigações matemáticas foram mais profícuas no caso das relações ente áreas do que nas relações ente perímetros.

Para além do foco das investigações realizadas, salienta-se no estudo a construção do papagaio a partir de atributos diferentes, assim como relações entre os atributos do papagaio e do retângulo. Desse modo, nos quadriláteros estudados, o recurso a atributos diferentes e a relações entre atributos distintos promovem uma aprendizagem mais profunda, permitindo estabelecer relações entre eles, facilitando a retenção e a evocação das aprendizagens (Skemp, 1993).

Quanto ao uso do GeoGebra, destaca-se a sua utilização na construção dos quadriláteros, na criação de vários exemplos através do arrastamento de objetos livres das construções, os quais, por sua vez, permitiram identificar invariantes e formular conjeturas (Junqueira, 1996). Também no estudo de Fernandes (2023), em que também se explorou uma investigação em Geometria, se salientaram todos estes aspetos, acrescentando-se no presente estudo a pesquisa de relações entre perímetros e entre áreas. Também neste caso, o estudo de tais relações revelou-se muito eficaz para a identificação de invariantes.

Em termos escolares, as tarefas investigativas aqui exploradas podem ser propostas a alunos do final do 3.º ciclo do ensino básico (9.º ano) ou do ensino secundário (do 10.º ao 12.º ano), distinguindo-se a abordagem com o GeoGebra e recorrendo a processos analíticos. No caso do GeoGebra, alunos do 9.º ano poderão identificar relações para perímetros e áreas através da exploração de exemplos e justificar essas relações por processos analíticos no caso da divisão dos lados do papagaio em duas e quatro partes iguais. Já os alunos do ensino secundário poderão explorar as investigações recorrendo ao GeoGebra e a processos analíticos, considerando a divisão dos lados do papagaio em 2^n partes iguais, com $n \in \mathbb{N}$, e estabelecendo generalizações das relações.

Nas investigações exploradas no estudo considerámos a divisão dos lados papagaio em 2^n partes iguais, com $n \in \mathbb{N}$, portanto, potências de 2, o que se justifica por se tratar de um processo simples de divisão dos lados do papagaio em partes iguais usando o GeoGebra. Para ultrapassar esta limitação, sugere-se a exploração das investigações estudadas em casos da divisão dos lados do papagaio num número de partes iguais diferente de 2^n, com $n \in \mathbb{N}$.

Referências

Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.) (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Associação de Professores de Matemática.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., & Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la Estadística a través de proyectos. In C. Batanero, & C. Díaz (Eds.), *Estadística con Proyectos* (pp. 9-46). Universidad de Granada.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular — Educação é a Base*. Ministério da Educação.

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. In Phillips, B. (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistics Education.

Fernandes, J. A. (2023). Explorar com o GeoGebra uma investigação em Geometria. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *14*(3), 1-19.

Fernandes, J. A., & Viseu, F. (2006). Implicações das novas tecnologias para o currículo de matemática. In A. F. Moreira, J. A. Pacheco, S. Cardoso, & A. C. Silva (Orgs.), *Actas do VII Colóquio sobre questões curriculares – III colóquio luso-brasileiro. Globalização e (des)igualdades: os desafios curriculares* (pp. 993-1007). Centro de Investigação em Educação da Universidade Minho.

Fernandes, J. A., Viseu, F., Fernandes, M. C., Silva, M., & Duarte, P. (2009). Uma intervenção de ensino em Estatística no ensino profissional através de investigações estatísticas. In B. D. Silva, L. Almeida, A. Barca, & M. Peralbo (Orgs.), *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 3441-3455). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, *5*(1), 61-108.

Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Básico*. Autor.

Ministério da Educação (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Secundário*. Autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Pereira, R. S. G., Palharini, B. N., & Damin, W. (2016). Investigações matemáticas em sala de aula: contribuições do Geogebra para a aprendizagem da função cosseno e seus parâmetros. *Revista Tecnologias na Educação*, n./v.17, 1-16.

Pólya, G. (1986). *A arte de resolver problemas: um novo aspeto do método matemático*. Interciência.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. In *Investigar em Educação* (vol. 2, pp. 93-16). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (p. 13-34). Associação de Professores de Matemática.

Rocha, A. (2002). Os alunos de matemática e o trabalho investigativo. In Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 99-124). Associação de Professores de Matemática.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-73). Associação de Professores de Matemática.

Skemp, R. (1993). *The psychology of learning mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6.º ano. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Associação de Professores de Matemática.

Enviado: 07/04/2024

Aceito: 06/04/2025