https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p025-043

O desenvolvimento de uma situação didática no ensino do Triedro de Frenet por intermédio da Engenharia Didática e uso do software GeoGebra[1]

Didactic Engineering for the development of a didactic situation in teaching the Frenet Trihedron using GeoGebra software

ANA CARLA PIMENTEL PAIVA[2]
https://orcid.org/0000-0001-5801-9562

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES[3]
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

HELENA MARIA DE BARROS CAMPOS[4]
https://orcid.org/0000-0003-2767-0998

RESUMO

Este estudo foi conduzido como parte de uma pesquisa de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, com foco na formação de professores. O objetivo foi integrar as novas tecnologias ao ensino de Matemática de nível superior, utilizando o software dinâmico GeoGebra. A intenção ao empregar essa ferramenta foi proporcionar uma visualização mais clara de um assunto presente nas disciplinas de Cálculo de Várias Variáveis e Geometria Diferencial, o Triedro de Frenet, afim de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos abstratos presentes nesse tópico matemático. Neste artigo, descreveremos como utilizamos o GeoGebra no ensino do Triedro de Frenet, adotando a metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática (ED). A ED nos ajudou a compreender a origem desses conceitos matemáticos e os obstáculos epistemológicos encontrados, permitindo-nos aplicar e executar uma abordagem didática que facilitasse a assimilação desse conteúdo pelos alunos.

Palavras-chave: *GeoGebra ; Geometria Diferencial; Triedro de Frenet; Engenharia Didática.*

ABSTRACT

This study was conducted as part of a master's degree research in Science and Mathematics Teaching, focusing on teacher training. The objective was to integrate new technologies into higher-level Mathematics teaching, using the dynamic GeoGebra software. The intention in using this tool was to provide a clearer visualization of a subject present in the Calculus of Multiple Variables and Differential Geometry disciplines, the Frenet Trihedron, to facilitate the understanding of the abstract mathematical concepts present in this mathematical topic. In this article, we will describe how we use GeoGebra to teach the Frenet Trihedron, adopting the research methodology known as Didactic Engineering

[1] Apoio: Trabalho financiado por Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, uma entidade ligada ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações-CNPQ e Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico- FUNCAP para incentivo à pesquisa no Brasil. Trabalho financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020) (CIDTFF)

[2]Instituto Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia - Fortaleza, Aluna do Doutorado - RENOEM–carlapimentel00@gmail.com
[3] Instituto Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia - Fortaleza – fregis@ifce.edu.br
[4] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro– Vila Real- hcampos@utad.pt

(DE). ED helped us understand the origin of these mathematical concepts and the epistemological obstacles encountered, allowing us to apply and execute a didactic approach that facilitated the assimilation of this content by students.

Keywords: *GeoGebra, Differential Geometry; The Frenet Trihedron; didactic engineering.*

Introdução

A origem da metodologia de pesquisa Engenharia Didática – ED, ocorreu nos anos 80, da necessidade de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da Didática da Matemática Francesa. A Didática da Matemática - DM refere-se a uma área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática (Douady, 1985).

Conforme Paiva (2019), o enfoque da Didática da Matemática era responsável pela construção e desenvolvimento de conhecimentos, de modo a oferecer elucidações às formas de transmissão de conceitos e teorias matemáticas, assim como meios de previsão e análise de situações relacionadas aos fenômenos de transmissão do saber matemático, baseados na epistemologia desse conhecimento matemático.

Enquanto a ED refere-se uma metodologia específica de pesquisa e intervenção dentro da Didática da Matemática. A ED se caracteriza por ser um processo sistemático e iterativo que envolve a concepção, experimentação e análise de situações de ensino(Alves, 2016a).

Por essa razão, a ED oferece uma abordagem estruturada e eficaz para o ensino do Triedro de Frenet, possibilitando a construção de um ambiente de ensino e aprendizagem que conecta teoria e prática. Por meio das etapas da ED – análise preliminar, concepção, experimentação e validação, é possível desenvolver atividades que explorem as propriedades geométricas e diferenciais das curvas no espaço, promovendo uma compreensão aprofundada dos vetores tangente, normal e binormal, bem como das noções de curvatura e torção.

Apesar do estudo do Triedro de Frenet ser fundamental na Matemática Aplicada, especialmente em áreas como física, engenharia e computação gráfica, pois fornece uma base teórica para compreender o comportamento geométrico de curvas no espaço tridimensional. A literatura acadêmica revela uma escassez de trabalhos que explorem o triedro de Frenet de forma aprofundada, especialmente no contexto do ensino. Portanto, abordagem didática é pouco desenvolvida, dificultando a transposição dos conhecimentos teóricos para práticas pedagógicas acessíveis.

De modo a exemplificar, podemos citar que em Batista (2011), Coimbra (2008), Resende (2017), os autores se dedicam ao estudo de conceitos matemáticos relacionados a curvas, apresentando teoremas, definições e exemplos. Contudo, esses estudos não demonstram qualquer preocupação com o ensino da Geometria Diferencial, tampouco oferecem abordagens didáticas ou perspectivas diferenciadas em relação aos livros tradicionais da área.

De forma semelhante, Faria (2017) realiza um estudo dos conceitos matemáticos ligados a curvas e superfícies, mas sem abordar os desafios relacionados à aprendizagem desses conteúdos. Assim, é possível identificar uma ampla gama de trabalhos que se concentram exclusivamente nos fundamentos matemáticos desse campo, deixando em segundo plano questões pedagógicas ou dificuldades específicas enfrentadas pelos estudantes.

Essa lacuna pode ser atribuída à complexidade dos conceitos envolvidos, como curvatura, torção e a interpretação geométrica dos vetores tangente, normal e binormal, que frequentemente exigem um nível avançado de abstração e conhecimento prévio em cálculo diferencial (Paiva, 2019). O triedro descreve a orientação local de uma curva, e os conceitos de curvatura e torção, que caracterizam suas propriedades intrínsecas. Essas ferramentas são essenciais para analisar trajetórias em sistemas dinâmicos, projetar caminhos em robótica ou estudar a deformação de estruturas.

No entanto, o conteúdo apresenta dificuldades significativas para os estudantes, como a abstração que envolvem os conceitos, a definição e interpretação da torção e da curvatura, que pode ser desafiadora, especialmente sem visualizações adequadas. Além disso, a manipulação das equações diferenciais associadas às curvas e a compreensão da inter-relação entre os vetores do triedro exigem habilidades analíticas avançadas. A ausência de recursos didáticos interativos e o enfoque excessivo na formalização teórica, sem aplicações práticas, também podem dificultar a aprendizagem. Por isso, estratégias pedagógicas que integrem tecnologia e visualização são essenciais para superar essas barreiras (Paiva, 2019).

Assim, apresenta-se esse conteúdo matemático utilizando ferramentas como o GeoGebra, os estudantes podem visualizar e manipular curvas tridimensionais, favorecendo a interpretação geométrica dos conceitos e a resolução de problemas práticos. Assim, a ED contribui para o desenvolvimento de estratégias didáticas que potencializam a aprendizagem significativa e interdisciplinar do triedro de Frenet.

Portanto, propõem se a apresentar o conteúdo Triedro de Frenet de modo mais interativo com o intuito de favorecer à compreensão do assunto, por meio de uma transposição didática, isto é, readaptação do ensino científico para o saber da matemática a nível superior, apoiada na visualização, com amparo na tecnologia, especificamente, no GeoGebra, que auxilia como suporte metodológico.

Prosseguiremos, com a exploração, de modo detalhado nosso quadro de referencial teórico, detalhando a nossa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, detalhando as suas fases, explicitando as fases para a elaboração das situações didáticas.

Fundamentação Matemática do Triedro de Frenet

A definição matemática de curva diferenciável, será a de uma aplicação diferenciável:

$$\alpha\text{:I}\rightarrow\mathbb{R}^n \text{ de classe } C^{\propto},$$

ou seja, uma curva em que podemos derivar quantas vezes desejarmos, em que I é um intervalo aberto da reta.

Em coordenadas cartesianas, se têm $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, em que a variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ de $\alpha(t)$ é chamado traço da curva (Paiva e Alves, 2018). Por simplicidade notacional, trataremos curvas diferenciáveis apenas por curvas.

Além disso, determinaremos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ será considerada *regular* quando $\forall\, t \in \mathbb{R}$ temos que $\alpha'(t) \neq 0$. Estabeleceremos também que uma curva está *parametrizada pelo comprimento* $\forall\, t \in I$, o comprimento do arco, norma dessa curva é unitária, ou seja $|\alpha'(t)| = 1$, em que $|\alpha'(t)| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \cdots + [x_n'(t)]^2}$.

Prosseguiremos nosso estudo, definindo o vetor tangente a uma curva α em t, como $T(t) =$

$\alpha'(t) = (x_1{}'(t), \dots, x_n{}'(t))$, e o vetor tangente unitário a α em t como

$$T_u(t) = {T(t)}\Big/{|T(t)|},$$

onde $|T(t)| = |\alpha'(t)| = \left|(x_1{}'(t), \dots, x_n{}'(t))\right| = \sqrt{[x_1{}'(t)]^2 + \cdots + [x_n{}'(t)]^2}.$

Veja que, se temos uma *curva ppca* o vetor tangente coincide com o vetor tangente unitário pois como $|\alpha'(t)| = 1$, temos que o vetor tangente unitário dado por

$$T_u(t) = \frac{T(t)}{|T(t)|} = \frac{T(t)}{|\alpha'(t)|} = T(t).$$

Compreendemos ainda que, se um vetor X possui norma $|X|$ constante, então $X'(t)$ é perpendicular a $X(t)$, para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$. Dessa forma, tomando uma curva ppca, visto que $T(t)$ tem norma 1, temos que $T'(t)$ é perpendicular a $T(t)$. Posteriormente, a autora define como vetor normal em uma curva ppca em $\mathbb{R}^3$ tal que $k(t) > 0$, o vetor $N(t) = \frac{T'(t)}{k(t)}$ (Teneblat,2008).

Portanto, ao contrário do que realizamos no espaço de dimensão 2, para encontrarmos acurvatura em uma curva $\mathbb{R}^3$, somente regular, devemos inicialmente realizar uma operação intitulada *mudança de parâmetro*. Na Figura 1, mostraremos a representação de um esquema deuma reparametrização pelo comprimento do arco.

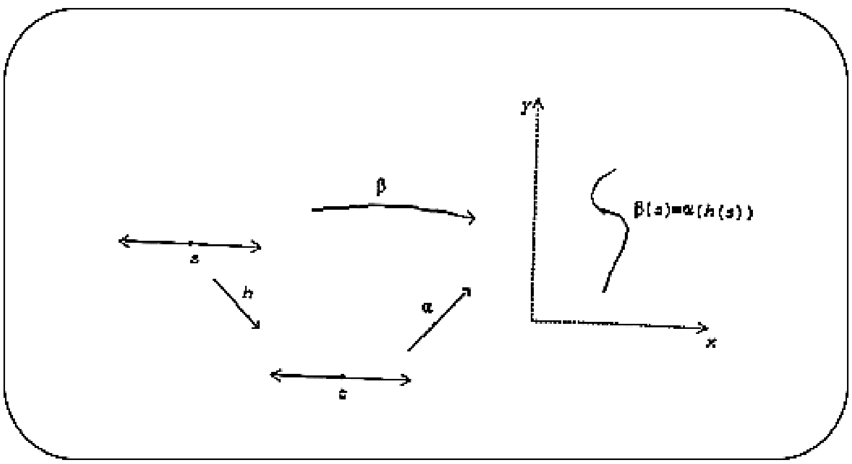

Figura 1: Sistematização do processo de reparametrização de uma curva plana desenvolvido por Teneblat(2008)
Fonte: Teneblat (2008, p.37)

Sejam $\alpha(t)$, $t \in I$, uma curva regular de $\mathbb{R}^3$, definiremos *a função comprimento de arco* da curva $\alpha(t)$ a partir de um ponto t_0 como a função s(t), estabelecida pela expressão:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$$

Desse modo, se tivermos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ *a função comprimento de arco* de α a partir de t_0. Então,sempre existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \; o \; h$ representa uma *reparametrização* de α , onde β está *parametriza pelo comprimento de arco – ppca* , sendo importante evidenciar que a função composta $\beta = \alpha \; o \; h$ é uma curva regular de $\mathbb{R}^3$ que apresenta o mesmo traço de α.

De agora em diante, prosseguiremos o nosso estudo com curvas regulares empregando situações que propiciem uma visualização satisfatória desses conceitos, com o auxílio do *GeoGebra*. Utilizando esse posicionamento como um alicerce para a razão da utilização de curvasregulares, Teneblat (2008, p. 34) afirma:

> Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é preciso que exista a reta tangente a uma curva α para cada valor do parâmetro t , para isso é suficiente que o vetor tangente a α seja não nulo para todo t, ou seja, as retas tomadas têm que ser regulares.

À título de exemplificação, foi desenvolvido no software GeoGebra com o intuito de auxiliar o entendimento o processo reparametrização pelo comprimento de arco de uma curva, a reparametrização de uma hélice circular cuja expressão $\beta(t) = (\cos(t)\ , sen(t), t)$ e e consequentemente comprimento de arco $|\beta'(t)| = \sqrt{2}$.

A função comprimento de arco da hélice em questão é dada por $s(t) = \int t\ \sqrt{2}dt = \sqrt{2}\ t$, assim se adota na operação mudança de parâmetro $h(s) = {}^{s}/_{\sqrt{2}}$
reparametrizando a curva pelo comprimento do arco e encontrando a expressão:

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), sen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

Na figura 2, dispomos da representação da hélice pela Curva $\beta(t)$ e sua respectiva reparametrização a Curva $\alpha(s)$.

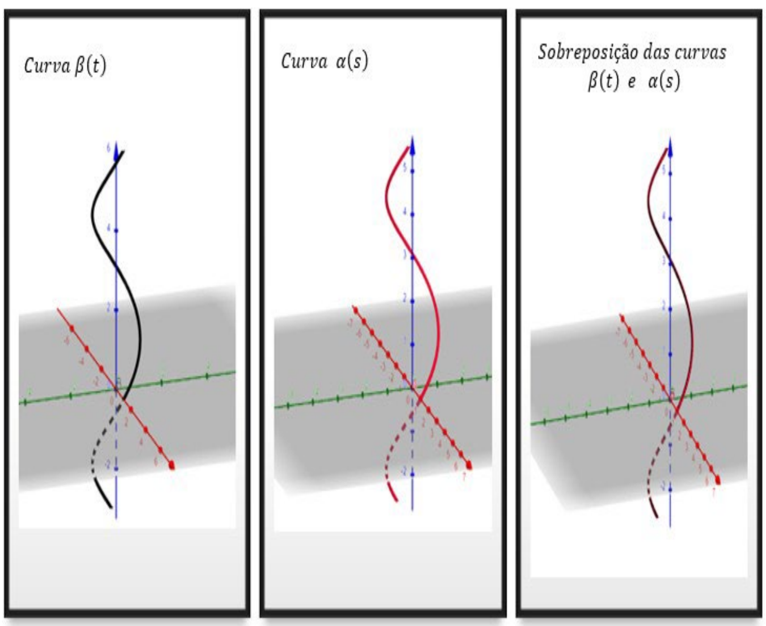

Figura 2: Representação da conservação do traço da curva após uma reparametrização pelo comprimento de arco.
Fonte: Paiva(2019,p.71)

Note, que a visualização desenvolvida na Figura 2, permite verificar a existência da igualdade do traço dessas curvas $\beta(t)$ e $\alpha(s)$, e o dinamismo do programa ainda permite realizar a sobreposição entre essas curvas e assim verificar que qualquer ponto curva $\beta(t)$ pertence a $\alpha(s)$e viceversa nos fornecendo assim a comprovação visual do teorema.

Triedro de Frenet

Para a definição e estudo do Triedro de Frenet, utilizaremos uma curva regular diferencialem $\mathbb{R}^3$, parametrizada pelo comprimento do arco. Portanto, trazemos à memória que uma curva em $\mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento do arco quando $|\alpha'(t)|$=1.Isto é,

$$|\alpha'(t)| = |\, x'(t) + y'(t) + \ z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]2 \ + \ [y'(t)]2 \ + \ [z'(t)]2} = 1.$$

Além disso, empregaremos a definição de a curvatura de α em s, denotada por $k(s)$, como uma função dada por: $k(s) = |\alpha''(t)|$. Mendes (2007, p.2) expressa uma concepção *sui generis*da noção geométrica de curvatura $k(s)$ no espaço vetorial real de dimensão três como “uma medida da variação de $\alpha'(t)$, ou seja, é a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção”.

Retomando no entendimento de Teneblat (2008) para retratarmos as noções algébricas de vetor tangente, normal em $\mathbb{R}^3$, é importante salientar que por admitirmos que a curva é ppca, não se faz necessários distinguirmos o vetor tangente unitário do vetor tangente, pois como visto anteriormente nesse caso tais vetores não apresentam distinção:

$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'\,(s), z'\,(s)) \ .$$

Assim, designaremos o vetor unitário ortogonal a $T(s)$ como vetor normal a curva α em s,

expressando na seguinte fórmula $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}$.

Por fim, definiremos um outro vetor existente nessa dimensão, intitulado vetor binormal à α em s, gerado pelo produto vetorial de $T(s)$ e $N(s)$:

$$\mathrm{B}(s) = T(s) \times N(s)$$

Observe que a norma do vetor binormal é unitária, $|\mathrm{B}(s)| = 1$, pois $T(s)$ e $N(s)$são vetores unitários. Prosseguindo, derivando tal vetor obtemos que $< B(s), B'(s) > = 0$ e que

$$B'(s) = T'(s) \times N(s) + \ T(s) \times N'(s).$$

Como ponderamos anteriormente $T'(s) \times N(s) = 0$, dado que o ângulo entre esses vetores é nulo, por conseguinte

$$B'(s) = T(s) \times N'(s),$$

inferindo assim que $B'(s)$ é ortogonal a $T(s)$. Isto é, $B'(s)$ corresponde ao produto de $N(s)$ por um número real.

Representaremos tal número real por $r(s)$, denominando o *torção* da curva em s. A noçãointuitiva referente ao conceito de torção pode ser expressa como a medida de quanto uma curva seafasta de um determinado plano. Além disso, vale salientar que a equação da *torção* também podeser apresentada na forma:

$$r(s) = < N'(s), \mathrm{B}(s) >.$$

Teneblat (2008, p.67) demonstra por meio de uma reparametrização pelo comprimento doarco que dada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t, podemos estabelecer que a *torção* da curva em t, pode ser representada pela expressão:

$$r(t) = \frac{<\alpha'(t)\ x\ \alpha'''(t), \alpha''(t)>}{|\alpha'(t)\ x\ \alpha''(t)|^2}.$$

O referencial ortonormal composto pelos vetores $T(s)$, $N(s)$, B(s) denominado *Triedro de Frenet* determina três planos: o Plano Osculador que é o plano formado pelo vetor tangente e o vetor normal, o Plano Normal é o plano formado pelo vetor normal e o vetor binormal, e o PlanoRetificante é plano formado pelo vetor binormal e o vetor tangente. A seguir, apresentaremos umesquema de uma curva de uma superfície e o Triedro de Frénet-Serret, proposto por Teneblat(2008,p.63), na figura 3.

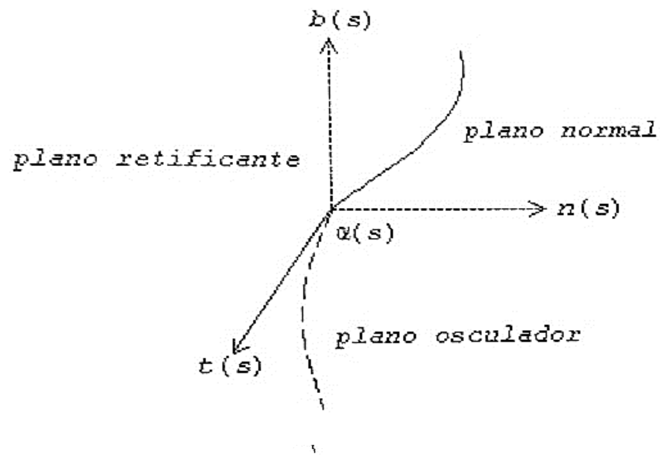

Figura 3: Representação do Triedro de Frenet-Serret proposto por Teneblat (2008) em uma curva regular *ppca* qualquer
Fonte: Teneblat (2008, p.6)

A fim de estabelecer um melhor entendimento do comportamento desses vetores e do triedro de Frenet, desenvolvemos uma visualização de tais conceitos por meio do *software* GeoGebra, explanando na imagem 4, em uma curva representada pela expressão $\alpha(t)$= $\left(2 - \cos(\mathrm{t})\,, \mathrm{sen(t)}, {}^{-t}/_{3sen(t)}\right)$.

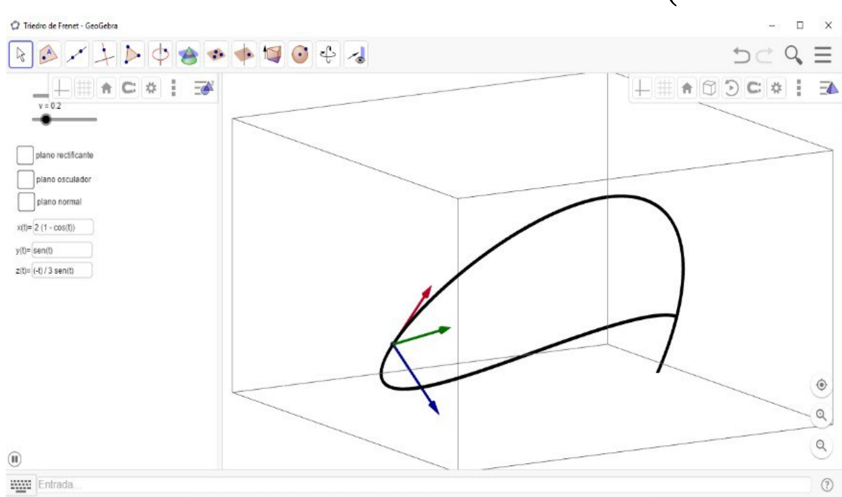

Figura 4: Representação do Triedro de Frenet na curva curva $\alpha(t) = (2 - cos(t)\,, sen(t), {}^{-t}/_{3sen(t)})$
Fonte: Paiva(2019,p.85)

Note que por meio do *software*, o aluno tem a oportunidade de analisar a curvas de diferentes orientações e observar a variação dos vetores pertencentes ao Triedro de Frenet, e dos respectivos planos gerados por eles, na representação da curva anterior, em que o plano retificanteestá representado na cor rosa, o plano osculador na cor amarela, por fim o plano normal na cor azul, como se pode observar na Figura 5.

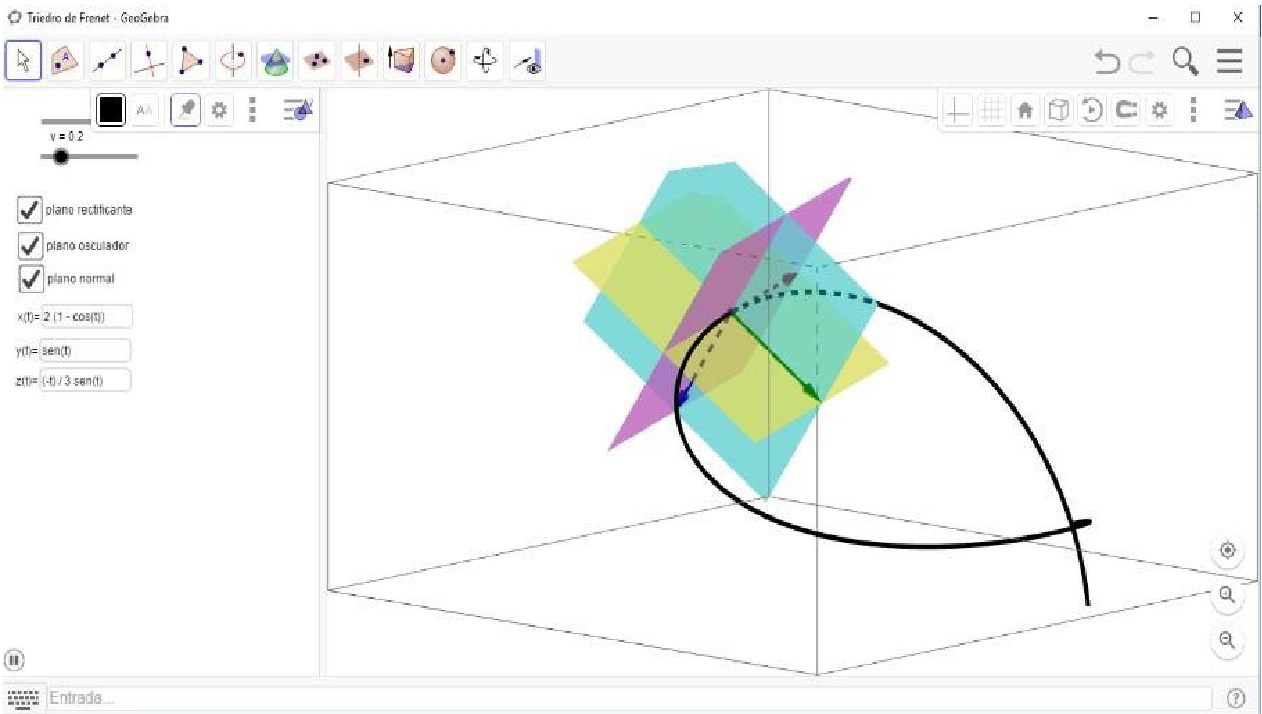

Figura 5: Representação dos planos resultantes do Triedro de Frenet, plano osculador(amarelo), retificante(rosa) e normal(azul)
Fonte: Paiva (2019, p.86)

Evidencia-se que os vetores retratados nessa seção pertencem a um referencial ortonormalde $\mathbb{R}^3$, por conseguinte relacionam-se por meio de combinações lineares retratadas através de equações que serão apresentadas na subseção subsequente.

Equação de Frenet para curvas

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco e tal que $k(s) > 0$,$\forall\, s \in I$, levando em consideração que o triedro de Frenet da curva α em s é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$, iremos obter os vetores $T'(s)$, $N'(s)$, $B'(s)$ como combinação linear de $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$. Nas subseções anteriores, assinalou-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s).N(s) \\ B'(s) = r(s).N(s) \end{cases}$$

Desse modo, elaboraremos uma expressão associada a $N'(s)$, advindo que o vetor normal em um determinado ponto pode ser obtido como produto vetorial entre os vetores binormal e tangente nesse ponto $(N(s) = B(s) \times T(s))$. Ao derivarmos tal relação, dispomos :

$$(N(s) = B(s) \times T(s))' = N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s)$$

Repare que podemos substituir as relações desenvolvidas anteriormente para $T'(s)$ e $B'(s)$, obtendo $N'(s) = (r(s) \,. N(s)) \times T(s) + B(s) \times (k(s). N(s))$.

Devido a orientação do referencial de Frenet e a definição dos vetores binormal $(B(s) = T(s) \times N(s))$ e tangente $(T(s) = N(s) \times B(s))$, encontramos a última relação :

$$N'(s) = -\, r(s). B(s) - k(s). T(s).$$

Procedimento Metodológico

Analisando os obstáculos relativos ao processo de ensino do Triedro de Frenet, devemos analisar a natureza dos objetos e processos matemáticos, de per si, podem proporcionar entraves ebloqueios ao ensino (Alves, 2016a).

O entendimento de tais bloqueios, é sistematizada pelo filósofo Gaston Barchelard (1884 – 1962), que os denomina como obstáculos epistemológicos. Segundo o filósofo esses obstáculosse tratam de elementos que pode retardar, e mesmo impedir um processo de entendimento do estudante submetido a uma ação intencional de ensino (Bacherlard, 1995).

Sistematização prevista pela Engenharia Didática no Triedro de Frenet - TDF

A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, na visão de Douady (1995, p.62) designa "um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente, por um professor-engenheiro, como fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos".

Em consonância Vieira, Alves e Catarino (2021) definem a ED como "um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino .

Ainda conforme os autores, a metodologia caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisa, denominadas de análises a priori e análises a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, que pode ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Devemos ressaltar que a ED pode classificar-se em duas tendências, a Engenharia Didática clássica, ou Engenharia de 1ª geração, cujo interesse maior se "revelou pela modelização das atividades do estudante, seu progresso de aprendizagem e os elementos clássicos perspectivados no triângulo didático indicado por: estudante – professor – conhecimento"(Alves,2018b, p.49).

Em consonância, Almouloud (2012) declara que a tendência inicial da ED, tinha por objetivo a elaboração e o estudo de uma proposta de uma transposição didática para o ensino, sendo essa transposição didática o objetivo principal da pesquisa. Mas, ao mesmo tempo, estudavam-se, também, outros fenômenos didáticos mais gerais que permitiam enriquecer e ampliar os quadros teóricos em construção.

Contudo, percebeu-se em tal tendência, determinadas insuficiências que foram apontadas e discutidas pelos didatas da Matemática, correspondentemente ao papel e a atividade do professorde Matemática, acarretando o desenvolvimento de uma nova tendência, sob o viés da ED, todavia,intitulada Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação - EDF (Alves,2018a).

Segundo Almouloud (2007), essa nova tendência, tem como objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores.

Assim, tendo em vista que a nossa atenção maior será dedicada a um público particular de professores em formação continuada, delimitamos que adotaremos os pressupostos de umaEngenharia Didática de 2ª geração. Em relação a sistematização prevista pela ED, estabelecemos que a mesma é composta por quatro fases: análises prévias, análises a priori, experimentação, análise a posteriori e validação, que serão apresentadas nas subseções a seguir.

Análises prévias

Na primeira fase da ED, as análises prévias, o pesquisador determina as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas (Almouloud,2007).

De forma mais sucinta, na perspectiva de Artigue (2002), Alves (2018,b,p.13) descreve que a dimensão epistemológica abrange as "características do saber", a dimensão cognitiva explora "as características cognitivas do público alvo" e por fim a dimensão didática que averigua "as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino".

Desse modo, investigamos a gênese do campo epistêmico matemático de Triedo de Frenet:

- TDF e os respectivos conceitos matemáticos desse campo, na análise epistemológica, para a previsão das possíveis concepções dos alunos , na análise cognitiva, e a adaptação dos conceitos científicos do Triedro a um saber da matemática à nível supeior, na análise didática.

Nesta análise preliminar pode ser feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino.

Concepção e análises a priori

Na segunda fase da ED, as análises priori, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações didáticas com a finalidade de responder às questões e validar as hipóteses suscitadas na fase anterior (Almouloud, 2007). Na concepção de Brousseau (1986), o desenvolvimento dessas situações debe ser análoga àquela que originou o conhecimento, de modo que a aprendizagem dos sujeitos agentes (os alunos) ocorre por adaptação, assimilação e equilibração.

De forma consoante, Almouloud (2007, p. 174) esclarece a formulação dessas situações didáticas, atestando que o pesquisador deva conceber "situações-problema de modo a permitir "ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos".

Assim devemos realizar uma análise matemática do conteúdo matemático explorado, para que possamos identificar os métodos , estratégias de resolução em cada situação, caracterizar os conhecimentos e saberes matemáticos prévios necessários para que o aluno consiga responder a situação-problema(Dos Santos, 2017).

Experimentação

Experimentação pode ser definida como a etapa que em ocorre a aplicação da sequência de situações didática, ou seja, é a etapa para garantir os resultados práticos com a análise teórica (Almouloud, 2007).

Assim, é nessa etapa que é colocado em prática todo o dispositivo planejado no momento anterior, na análise a priori. Nessa fase, o professor deve apresentar os objetivos da pesquisa e deixar claras as condições para a realização do trabalho, estabelecendo assim um contrato didático (Almouloud, 2007).

Análise a Posteriori e Validação

A etapa denominada análise a posteriori e a validação se refere ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, a etapa em que ocorreu efetivamente a fase experimental da pesquisa (Almouloud, 2007).

Nessa etapa meio desse tratamento de informações, obtemos uma confrontação com as hipóteses desenvolvidas na análise a priori, permitindo a "interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas" (Pommer, 2013, p.26). Assim, por meio dessas informações coletadas podemos averiguar se tais hipóteses ocorrem e quais "são ascontribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá avalidação do objetivo da pesquisa" (Pommer, 2013, p.26).

Por essa razão nossa opção conceptual para a elaboração da sequência didática prevista para a segunda fase da ED. Além disso, empregamos a Teoria das Situações Didáticas - TSD, devido a sua estrutura para a elaboração de situações didáticas, que especificaremos mais adiante. Ademais, destacaremos a existência de uma vasta literatura que relacionam que a TSD e a ED, evidenciando que essa complementariedade que pode possibilitar a ruptura de determinados formatos de ensino (Alves,2016b).

Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas foi concebida pelo educador matemático Guy Brousseaucom o intuito de aplicar situações ditas identificáveis (naturais ou didáticas) para modelar, de umamaneira geral, o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, considerando as especificidades dos conteúdos (Almouloud, 2007).

A TSD desenvolve formas de apresentação de determinado conteúdo matemático, com a utilização de situações didáticas planejadas, na compreensão da existência de um Triângulo Didático composto pelo aluno - professor - saber, e suas dinâmicas e complexas relações (Batista,Barreto e Sousa (2021).

Conforme Brousseau (2008, p. 20) podemos definir como "um modelo de interação de umsujeito com um meio determinado", que pode ser realizada através de um desafio ou qualquer tipo de dispositivo criado para que o aprendizado ocorra de forma efetiva.

Além disso, Brousseau (2008) defende que para que ocorra o entendimento por parte do aluno deve existir uma interação entre o aluno e o conhecimento, a denominada situação didática, que ocasiona a apreensão do conhecimento. Assim, a situação didática é caracterizada por "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado" (Brousseau, 2008, p.20). A partir disso, os autores Batista, Barreto e Sousa (2021), afirmam que essa teoria:

> [...] priorizou a ação do estudante como produtor de seu conhecimento matemático, enquanto enfatizou o papel do professor como o responsável por criar o meio adequado, com condições para que os alunos, a partir de seus conhecimentos e experiências prévias, apropriem-se dos conceitos matemáticos. (Batista, Barreto e Sousa, 2021, p. 579).

Conforme Brousseau (2008) as situações de ensino devem ser elaboradas pelo professor para que o aluno seja capaz de construir e se apropriar do conhecimento. O processo de assimilaçãodos conceitos por meio da TSD é dividido em dialéticas que podem ser modeladas de acordo comas situações de ação, formulação, validação e institucionalização, possibilitando a aprendizagem do aluno. Deste modo, podemos sintetizar como ocorre cada uma dessas situações, conforme explanado na Figura 06.

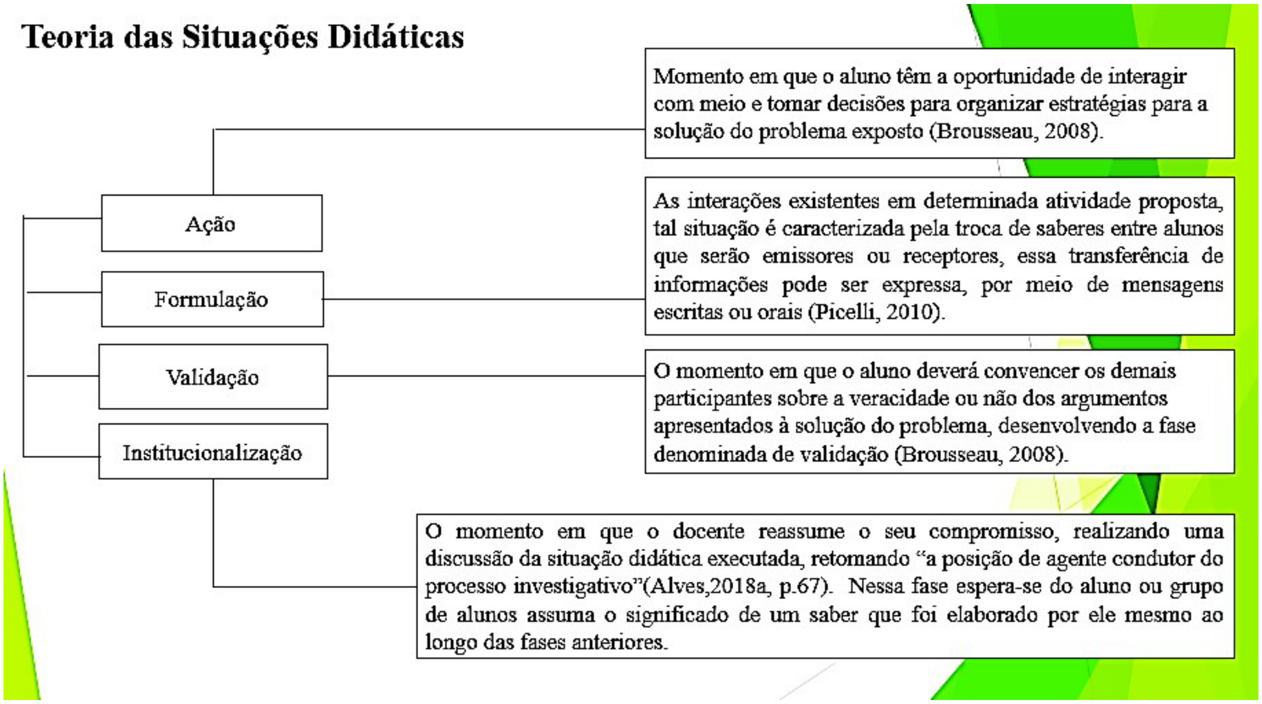

Figura 06: Descrição das quatro fases da Teoria da Situação Didática
Fonte : Paiva e Alves(2023, p.6)

A partir do exposto, na figura 6, presentes nas dialéticas, percebemos que o aluno vivencia diretamente a construção do seu conhecimento. Assim, confirmamos a predileção da TSD às necessidades deste trabalho e que será necessária para o momento de análise de dados.

Concepção e Análise a priori dos conceitos das Situações Didáticas

Nessa seção apresentaremos a aplicação da segunda fase da ED, em que elaboramos e analisamos uma sequência de situações problema, as situações didáticas, que envolvem osconceitos basilares de curvas e incipientes de superfícies. Para efeito de maior sistematização, assumiremos que uma situação problema envolve "a escolha de questões abertas ou fechadas numasituação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios do saber" (Almouloud, 2007, p. 174).

Ainda no campo de saberes referenciados por Almouloud (2007, p.174), é possível, tendoem vista o nível elementar da Matemática, considerar situações "menos matematizada". Entretanto, em nosso caso, o modelo matemático condiciona, fortemente, todas as estratégias e ações e decisões dos aprendizes.

De forma mais sucinta, o nosso campo epistêmico matemático, pertencente a um corpus teórico-formal, implica em fortes condicionantes derivados da própria construção/demonstração e descrição dos conceitos de TDF.

Para a elaboração dessas situações didáticas, levaremos em consideração, com vistas à estruturação das situações-problema, algumas características apontadas por Almouloud (2007): que as situações devem contemplar um campo conceitual em que se deseja efetivamente explorar;os conhecimentos antigos não devem ser suficientes para a resolução completa do problema, e que o problema deve envolver vários domínios do conhecimento.

Nesse sentido, precisamos distinguir e especificar os seguintes elementos: os problemas que tencionamos explorar e quais domínios analíticos e gráfico-geométricos do TDF, entretanto, os conhecimentos antigos (no caso os saberes relacionados a Cálculo de Várias Váriáveis) não devem ser suficientes para a resolução.

Outrossim, nas situações que buscamos apresentar, desejamos que “elas permitam adaptações dos alunos, na medida em que tomam decisões e as modificam” (Brousseau, 1986, p. 440).

Além disso, como visamos descrever situações de ensino fundamentadas de uma Matemática procedente de nível avançado, nosso campo conceitual é condicionado, por vezes, por uma definição formal ou um teorema estruturante, esse fato, concomitante ao caráter de não trivialidade/abstracionismo dos conceitos de TDF, remete que as situações-problema requeiram conhecimentos suficientes da área para sua resolução, portanto, inferimos que a nossa abordagem deva ser determinante.

Por esta razão, utilizamos a visualização proporcionada pelos softwares como uma variável didática recorrente no cenário de aprendizagem apresentado aos estudantes. Além disso, também assumimos posição consoante com Almouloud (2007, p. 174) ao acentuar que “as atividades devem ser concebidas, levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios”, e terão por objetivos: auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e significativa; desenvolver certas habilidades como, por exemplo, saber ler, utilizar as diferentes representações matemáticas e desenvolver raciocínio dedutivo.

Assim, destacamos que os objetivos da análise a priori devem determinar que as escolhas realizadas permitam o controle do comportamento dos alunos e seu significado (Artigue, 2002).

Desta forma, as escolhas e descrição de ações futuras, nessa seção, são fundamentadas em pressupostos teóricos, que devem permitir o controle didático da transposição didática e do sentidodas ações futuras envolvendo a mediação de saberes.

Nesse sentido, na discussão das situações-problema, são consideradas algumas variáveis didáticas debatidas. Por essa razão, os conceitos matemáticos definidos para as situações-problemadirecionam os alunos à compreensão dos conceitos fundamentais relacionados ao entendimento do conceito curva como: curvatura, torção, Triedro de Frenet.

Ademais, em relação aos obstáculos epistemológicos, devam surgir em relação aos conhecimentos prévios das áreas de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo de Várias Variáveis, desse modo, conhecimentos necessários para o entendimento do conteúdo, como derivadas parciais, produto vetorial, pois as questões desenvolvidas envolvem a discussão de teoremas e propriedades, e se caracterizam pelo uso do método de derivabilidade de funções de várias variáveis do CVV.

Situação-problema (1): Encontre por meio de uma correlação entre os vetores tangente , normal e binormal as fórmulas do Triedro de Frenet- TDF, e em seguida, desenvolva o significadogeométrico do conceito torção.

O participante da experimentação deve basear-se nos conceitos prévios de álgebra linear, geometria analítica com consonância a fundamentação teórica dos conceitos de GD, para o estabelecimento de uma relação entre o significado algébrico e geométrico dos vetores tangente e normal e binormal em curvas ppca para encontrar as fórmulas do Triedro de Frenet.

Na formulação, o participante deve compreender que a relação $T'(s) = k(s). N(s)$, encontrada no diedro de Frenet permanece correta para curvas de dimensão três. Posteriormente, o participante deve articular a utilização das técnicas de derivação para determinar uma relação a partir do vetor binormal, normal.

Na validação, após a derivação do produto vetorial $B(s)$ = $T(s)\ x\ N(s)$, o participante encontrará $B'(s)$ = $T(s)\ x\ N'(s)$, e assim concluirá que $B'(s)$ é ortogonal a T(s). Ao mesmo tempo, irá perceber que, devido a norma do vetor B(s) ser unitária, que $B'(s)$ = é ortogonal a B(s). Logo, ocorre que $B'(s)$ encontra-se na mesma direção de N, diferindo de N por uma constante e sentido, coincidindo com a definição de torção.

Por fim, o participante deve empregar as duas expressões encontradas $\begin{cases} \mathrm{T}'(\mathrm{s}) = \mathrm{k}(\mathrm{s}).\mathrm{N}(\mathrm{s}) \\ \mathrm{B}'(\mathrm{s}) = \mathrm{r}(\mathrm{s})\,.\mathrm{N}(\mathrm{s}) \end{cases}$, de modo articulado ao fato de que o vetor normal, pode ser expresso como N(s) = B(s) x T(s), empregando novamente a derivação do produto vetorial para encontrar que $N'(s) = -r\,.\,B(s) - k(s).\ \ T(s)$, encontrando assim as fórmulas do Triedro de Frenet- TDF. Na situação de institucionalização, finalmente, deve-se ter argumentos para se determinar uma analogia entre os conceitos geométrico de curvatura e torção para a curvas de dimensão três.

Situação-problema (2): Analise e efetue o cálculo da torção e curvatura da hélice circular cuja expressão é dada :

$$\gamma(s) = \left(acos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, asen\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Em seguida, correlacione e analise por meio do software GeoGebra geometricamente o comportamentoos planos gerados a partir do Triedro Móvel de Frenet.

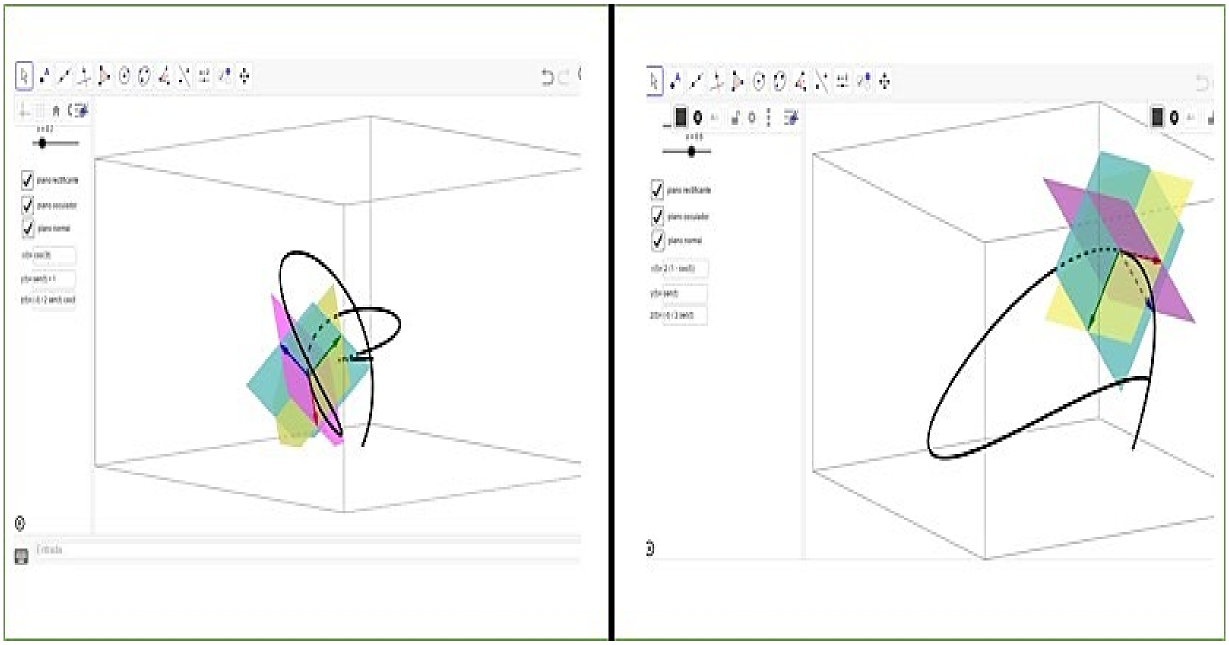

Figura 7 : Explanação das curvas utilizadas na situação – problema (2) para a análise dos planos osculador,retificante e normal.
Fonte: Paiva(2019, p.120)

No que concerne a situação problema (2), ensejasse que os participantes, na ação, se comprometam a efetuar o cálculo da torção e curvatura, e analisem o comportamento dos vetorestangente, normal e binormal, resultando dessa maneira na caracterização dos planos formados pormeio desses vetores: osculador, retificante e normal.

Na formulação, os alunos devem verificar a natureza da curva proposta (se a curva está parametrizada pelo comprimento do arco- ppca ou não encontram-se nessa forma), para desse modo empreguem a equação adequada para o cálculo da curvatura e torção, prosseguindo com a verificação por meio da simulação o comportamento de curvas de qualquer natureza em um espaçovetorial de dimensão três.

Na etapa posterior, a validação, o participante deve derivar a equação da curva, para assim,concluir que se trata de uma curva ppca. Em seguida, compreender que devido a natureza da curva,concluir que a primeira derivada da curva se refere a expressão do vetor tangente.

O participante debe prosseguir efetuando o cálculo da norma da expressão gerada por meiode uma segunda derivação da curva, encontrar a expressão da curvatura, e apartir disso, encontraro valor do vetor normal. Neste momento o participante deve realizar o produto vetorial entre os vetores tangente e normal para obter o vetor binormal, e por fim, encontrar o valor da torção. As expressões encontradas ao fim do raciocínio, devem ser $\sigma = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $k = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Ainda na segunda parte dessa situação, é requerido aos participantes apenas o significado geométrico desses conceitos, com isso, esperasse o partipante interprete as curvas e assim realize por meio de uma associação entre a definição desses vetores, uma representação desses vetores e dos respectivos planos gerados por eles. Por fim, na institucionalização, deve formalizar-se e sistematizar os argumentos para verificar o valor da curvatura, torção e os vetores tangente, normale binormal.

Conclusão

Essa pesquisa apresentou uma abordagem epistemológica acerca do ensino de um conteúdo matemático Triedro de Frenet- TDF. Nessa perspectiva, esta pesquisa buscou propor uma situação didática com o uso do software GeoGebra como forma de contornar os obstáculos epistemológicos relacionados ao entendimento dos conceitos de TDF, entre os quais se destacam a abstração dos conceitos e a complexidade envolvida.

Descrevemos e exemplificamos os vários conceitos abordados ao longo deste estudo, de modo a fornecer ao estudante que esteja a iniciar-se no campo de saberes uma forma diferenciada de explicação e visualização da matéria. Buscando transmitir o significado dos conceitos com o auxílio do software GeoGebra de modo a relacionar a definição ao significado geométrico.

Assim verificou-se, inicialmente a noção geométrica do conceito curvatura em curvas planas, correlacionando-os aos vetores tangente e normal e analisando o seu comportamento ao longo das curvas analisadas.

Além disso, se verificou que dadas duas curvas regulares, estas serão equivalentes se suas parametrizações apresentam o mesmo traço ou for possível aplicar uma mudança de parâmetros, tal fenômeno encontra-se por meio de uma simulação do GeoGebra. Por meio da operação mudança de parâmetro, também compreendemos que sempre podemos reparametrizar pelo comprimento do arco, ou seja, mudar o parâmetro da curva afim que a curva apresente norma unitária.

Prosseguimos o estudo apresentando a inclusão do conceito geométrico torção, que nos trouxe um encadeamento de novos conceitos e teoremas, como o vetor binormal, o que torna a compreensão do conceito indispensável. Por esta razão, correlacionamos o significado geométrico de curvatura ao significado geométrico de torção. Doravante, inferimos a existência de uma base ortonomal gerada pelos vetores normal, binormal e tangente, originando o Triedro de Frenet – TDF.

Os vetores pertencentes ao TDF também estabeleceram os três planos: plano normal, plano retificante e planos osculador, prosseguimos com a obtenção de equações através do Triedro de Frenet e propriedades relacionadas.

Descrevemos e exemplificamos os vários conceitos abordados ao longo deste estudo, de modo a fornecer ao estudante que esteja a iniciar-se no campo de saberes uma forma diferenciada de explicação e visualização da matéria. Buscando transmitir o significado dos conceitos com o auxílio do software GeoGebra de modo a relacionar a definição ao significado geométrico.

Assim verificou-se, inicialmente a noção geométrica do conceito curvatura em curvas planas, correlacionando-os aos vetores tangente e normal e analisando o seu comportamento ao longo das curvas analisadas.

Além disso, se verificou que dadas duas curvas regulares, estas serão equivalentes se suas parametrizações apresentam o mesmo traço ou for possível aplicar uma mudança de parâmetros, tal fenômeno encontra-se por meio de uma simulação do GeoGebra. Por meio da operação mudançade parâmetro, também compreendemos que sempre podemos reparametrizar pelo comprimento doarco, ou seja, mudar o parâmetro da curva afim que a curva apresente norma unitária.

Prosseguimos o estudo apresentando a inclusão do conceito geométrico torção, que nos trouxe um encadeamento de novos conceitos e teoremas, como o vetor binormal, o que torna a compreensão

do conceito indispensável. Por esta razão, correlacionamos o significado geométricode curvatura ao significado geométrico de torção. Doravante, inferimos a existência de uma base ortonomal gerada pelos vetores normal, binormal e tangente, originando o TDF.

Os vetores pertencentes ao TDF também estabeleceram os três planos: plano normal, plano retificante e planos osculador, prosseguimos com a obtenção de equações através do Triedro de Frenet e propriedades relacionadas.

Desse modo, a ED oportunizou o desenvolvimento de uma compreensão associada ao processo epistemológico-matemático dos conceitos relacionados. No entanto, ainda não compreendíamos como poderíamos elaborar situações de ensino relacionadas a esses conceitos matemáticos de modo que, com a exploração do software GeoGebra, possamos identificar um melhor entendimento e/ou a ressignificação desses conceitos.

Assim, tornou-se necessário um aporte teórico metodológico que nos auxiliassem a elaboração de situações-problema com os conceitos discutidos anteriormente. Na etapa de análisea priori da nossa pesquisa, desenvolvemos uma sequência de situações didáticas embasadas pelo pressupostos da TSD, em que buscamos indicadores da compreensão de conceitos relacionados acurvas planas e espaciais. Salientamos que a escolha desse objeto matemático para a análise, sucede-se por necessitar de conhecimentos prévios apenas de CVV, Algebra Linear.

Salientaremos, que a nossa pesquisa sucedeu-se no contexto da microengenharia didáticae considerando os efeitos da transposição didática, os conceitos de GD foram desenvolvidos em situações de ensino que proporcionassem através da visualização o entendimento dos conceitos curvatura, torção, noções relacionadas aos vetores tangente, normal e binormal e simultaneamenteconfrontassem com o entendimento algébrico que alguns alunos possuíam desses conceitos.

Assim, ao final dessa pesquisa, esperamos que nosso trabalho contribua no sentido de detalhar, sistematizar, identificar, pormenorizar e discutir elementos inerentes ao ensino de TDF, dado a pouca visibilidade, tanto no contexto nacional quanto internacional, de pesquisas de ensino em relação a essa área.

Referencias

ALMOULOUD, A. S. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.2021.

ALMOULOUD, Ag Saddo; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade.

Revemat:R. Eletr. de Educação Matemática. 7(2), p.22-52,2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981- 1322.2012v7n2p22/23452>. Acesso em : 10 de Janeiro de 2025.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. *Revista ENCITEC*, v. 6, n. 2, 1-22.(2016a).

ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educação*, v. 7, n. 21, 131-150.(2016b) Disponível em: https://doaj.org/article/e617dd79ca4740de81bebc71909fc5f3. Acesso em:10 de Janeiro de 2025.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos

Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática,* v. 20, n. 2, 2018a.

ALVES, Francisco Regis Vieira. CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Engenharia Didática de Formação (Edf): Repercussões Para A Formação do Professor de Matemática no BrasiL. *Educação Matemática em Revista - RS*, v. 2, n. 18, 22 fev. 2018b.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? Les dossiers des sciences de l'éducation. 1(8), p.59- 72. 2002. *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes.* Disponível em: http://www.persee.fr/docAsPDF/dse-du_1296-2104_2002_num_8_1_1010.pdf Acesso: 10 de Janeiro de 2025.

BATISTA, Ricardo Alexandre. *Tópicos de geometria diferencial*. 2011. 91f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Estadual Paulista - Campus Rio Claro. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstreams/1763ee21-82fa-4c9a-a001-26eeb1559922/download Acesso em 10 de Janeiro de 2025.

BATISTA, P. C. da S. & BARRETO, M. C. & DE SOUSA, A. C. G..Teoria das situações didáticas presentes na prática pedagógica em matemática a partir da formação e reflexão docente. *Debates em Educação*, v. 13, n. 31, p. 577–602.2021. DOI: 10.28998/2175- 6600.2021v13n31p577-602. Disponível em: https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/10606. Acesso em: 10 de Janeiro de 2025.

BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico*. São Paulo: Contra-Ponto. 1995.

BROUSSEAU, Guy. *Théorisation de phénomènes d´enseignement des mathématiques.*1986. (Tese deDoutorado)- I. 905f. Université de Bordeaux . Bordeaux- França .

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* Apresentação de Benedito Antônio da Silva. São Paulo: Ática. 2008.

COIMBRA, Jose de Ribamar Viana. *Uma introdução a geometria diferencial.* 2008. Dissertação de Mestrado -Unicamp- São Paulo. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=504086. Acesso : 10 de janeiro de 2025.

DOUADY, Régine. Didactique des mathématiques. *Encyclopedia Universalis*, p. 885-889, 1985.

DOS SANTOS, Arlem Atanazio.(2017). *Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da Fórmula de Binet como generalização e extensão da sequência de Fibonacci*. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará- IFCE, Dissertação(Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática),Fortaleza. Disponível em: https://www.academia.edu/download/53385857/Dissertacao_finalizada_com_a_catalografica_final.pdf. Acesso em 10 de Janeiro de 2025.

FARIA, Esmeralda Pereira de. *Um estudo sobre curvas, superfícies e suas parametrizações.* 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade da Madeira (Portugal). Disponível em: //repositorio.uma.pt/bitstream/10400.13/1592/1/MestradoEsmeraldaFaria.pdf. Acesso em: 10 de Janeiro de 2025.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Regis Vieira. Utilização do GeoGebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 7, n. 2, p. 65-79, 2018.

PAIVA, Ana Carla Pimentel. *Engenharia Didática sobre o estudo e ensino de conceitos de Geometría Diferencial: Descrição de Situações Didáticas com a utilização do software GeoGebra*. 2019. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. InstitutoFederal de Educação, Ciência e tecnología do Ceará – IFCE. Fortaleza- CE. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7778649. Acesso em : 10 de Janeiro de 2025.

PAIVA, Ana Carla Pimentel & ALVES, Francisco Regis Viera. *Engenharia Didática para o ensino de equações diferencaisordinárias de segunda ordem: análises preliminares e a priori com a utilização do software GeoGebra.* In: I Congresso GeoGebra Pernambuco - UFPE - Recife, 2023. Disponível em: <https://www.doity.com.br/anais/icongressoGeoGebrape/trabalho/311977>. Acesso em : 10 de Janeiro de 2025

POMMER, Wagner Marcelo . A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. *São Paulo:[sn]*.2013.

RESENDE, Kepler Alves et al. *Curvas e Aplicações*. 2017. Dissertação de mestrado . Universidade Federal de Goías , disponível em : https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/download/35458/26493. Acesso em : 10 de Janeiro de 2025

TENEBLAT, Ketti. *Introdução à Geometria Diferencial*.ed. 2a. Editora Blucher. São Paulo.2008.

VIEIRA, Renata, MANGUEIRA, Milena, ALVES, Francisco, & CATARINO, Paula. Engenharia Didática e uma investigação do processo de hibridização da Sequência de Fibonacci. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 12, n. 1, p. 1-22, 2021.

Enviado: 09/05/2024

Aceito: 11/01/2025