



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p058-075>

Geometrização do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Polya

Geometrization of the Pythagorean Theorem and its generalization as Polya's Theorem

DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO¹

<https://orcid.org/0009-0005-3835-7894>

IDALICE MARIA SANTIAGO OLIVEIRA²

<https://orcid.org/0009-0008-2814-407X>

CARMEN VIEIRA MATHIAS³

<https://orcid.org/0000-0001-5667-159X>

RESUMO

O Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais importantes e conhecidos teoremas da Matemática, devido a sua ampla aplicação na resolução de problemas ligados à Geometria e ciências afins. Atualmente, percebe-se que o referido Teorema, na maioria das situações, em especial na Educação Básica, é abordado essencialmente no seu formato algébrico, com pouca ênfase na Geometria. O artigo, recorte de uma dissertação de mestrado, possui como objetivo apresentar uma abordagem da demonstração do Teorema de Pitágoras focalizando em sua geometrização, utilizando áreas de figuras semelhantes, via construções realizadas no software GeoGebra. Além disso, apresentam-se uma demonstração e construções interativas do Teorema de Polya, que é uma das generalizações do Teorema de Pitágoras. Tal olhar, poderá despertar um maior interesse por esses resultados, visto que proporcionam um entendimento conceitual e visual significativo, diferentemente das versões puramente algébricas desses teoremas.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Geometria; Áreas; Teorema de Polya.

ABSTRACT

Pythagoras Theorem is considered one of the most important and well-known theorems in Mathematics due to its wide applications in solving problems related to geometry and to sciences. Currently, in most situations, especially in Basic Education, its approach occurs essentially via its algebraic form, with little emphasis on geometry. The article, which is part of a master's thesis, aims to present an approach to prove Pythagoras Theorem focusing on its geometrization, using

¹ Universidade Federal de Campina Grande – demoraisfilho@gmail.com

² Secretaria Estadual da Educação – Paraíba – idalice56@gmail.com

³ Universidade Federal de Santa Maria – carmen@uol.com.br



areas of similar figures, via constructions performed by the GeoGebra software. Additionally, it presents a proof and interactive constructions of Polya's Theorem, which is one of the generalizations of the Pythagoras Theorem. Such an approach may arouse more interest in these results, as they provide a significant conceptual and visual understanding of the theorems, instead of their purely algebraic versions.

Keywords: Pythagorean theorem. Geometry. Areas. Polya theorem.

Introdução

Na Matemática, a Geometria sempre provocou um fascínio na humanidade, seja por sua utilidade, necessidade ou beleza. Entretanto, atualmente, percebemos que alguns teoremas, de caráter essencialmente geométrico, que poderiam despertar esse fascínio e atrair a atenção dos alunos, têm tido apenas um tratamento puramente algébrico. Conforme Ratner (2009), um exemplo típico desse caso é o Teorema de Pitágoras, que certamente é um dos poucos teoremas que as pessoas recordam ter aprendido no Ensino Básico. No entanto, se for solicitado que uma pessoa enuncie esse teorema, talvez não consiga fazê-lo completamente. Provavelmente, mencionará que se trata de um resultado relacionado a triângulos retângulos, ou que a conclusão é dada por uma expressão algébrica “ a elevado ao expoente dois é igual à b elevado ao expoente dois mais c elevado ao expoente dois”. Isso significa que, ao ensinar e aprender sobre esse tópico, perdeu-se uma oportunidade de despertar naquela pessoa, enquanto estudante, uma bela visão geométrica de um resultado matemático. Uma apresentação puramente algébrica de um resultado matemático, que tem em sua essência um significado geométrico, pode ter como consequência apenas memorização de fórmulas, muitas vezes sem significado.

Observa-se que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda que o “Teorema de Pitágoras seja estudado por verificações experimentais e demonstrações” (Brasil, 2018, p.319). Visto a experiência docente dos autores do presente artigo, e, seguindo essas recomendações da BNCC, focar e resgatar a essência e o aspecto geométrico de certos teoremas, pode ser uma alternativa estimuladora para cumprir essas recomendações, em detrimento a abordagens puramente algébricas. Para enfatizar esse modelo de trabalho, será utilizado a expressão “geometrização”, que na pesquisa realizada, consistiu na utilização das ferramentas disponíveis no software GeoGebra para construir atividades que sejam capazes de auxiliar a visão e o entendimento da parte geométrica desses teoremas no prazer de descobrir, formular, generalizar padrões e conjecturar. Esses processos estão no cerne da prática matemática, como destacado por estudiosos como Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) e Polya (1973).

Em especial Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) argumentam que a matemática escolar deve proporcionar aos alunos oportunidades para desenvolver hábitos



mentais, incluindo visualização, procura de padrões, experimentação, conjectura, invenção e construção de argumentos matemáticos. E, uma ferramenta que pode servir para facilitar alguns desses importantes hábitos, processos e práticas matemáticas é o Software de Matemática Dinâmica (SMD) GeoGebra. Isso ocorre, visto que, a partir das opções disponíveis no software, os usuários podem realizar construções envolvendo conceitos geométricos de forma mais ágil e precisa do que ao utilizar instrumentos físicos, como régua e compasso.

Além disso, o SMD pode auxiliar os usuários a perceberem visualmente um padrão e a se questionar se o padrão parece plausível, como também empregar as ferramentas desse software para verificar esses padrões e formular conjecturas sobre eles. E, a característica mais importante de sua utilização é o conceito de “estabilidade do desenho sob ação de movimento” estabelecido por Gravina et al (2011) que destaca a importância e a necessidade de demonstrações na Geometria. Após realizar uma construção e aplicar deslocamentos aos elementos iniciais, ocorre uma transformação da figura que mantém as relações explícitas e implícitas estabelecidas na construção. Em outras palavras, o SMD exibe uma série de “desenhos em movimento” que preservam certos padrões ou invariantes geométricos, que podem ter sido propositalmente criados ou não durante o procedimento de construção. Se os padrões ou invariantes, não tenham sido declarados, eles são passíveis de demonstração.

Nesse sentido, o objetivo do presente artigo, recorte de Oliveira (2023), é apresentar uma abordagem da demonstração do Teorema de Pitágoras focalizando em sua geometrização, utilizando áreas de figuras semelhantes via construções realizadas no software GeoGebra. E, oportunamente, seguindo a mesma abordagem, apresentar o Teorema de Polya, que é uma das interessantes generalizações do Teorema de Pitágoras, não muito conhecido por várias pessoas.

1. Os Teoremas de Pitágoras e de Polya

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$. (Wagner, 2010, p.4)

Conforme explicitado na introdução, esse é um dos mais populares e conhecidos teoremas da Matemática. E, é importante que ao ensinar e aprender esse teorema, seja possível identificar as expressões algébricas a^2 , b^2 e c^2 para além de



uma representação de potências de números, ou seja, concebê-las como áreas de quadrados. Na Figura 1, considerando o triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , as áreas dos quadrados construídos sobre os lados a , b e c possuem, respectivamente, áreas denotadas por A , B e C . O Teorema de Pitágoras garante uma expressão de essência geométrica entre as áreas desses quadrados: $A = B + C$.

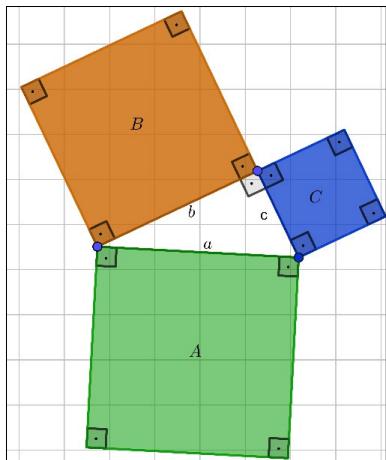


FIGURA 1: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras⁴.
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Uma vez que quadrados são figuras semelhantes, um outro teorema, provado cerca de 24 séculos após o de Pitágoras, apresenta uma generalização desse último em termos das áreas de figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo (Figura 2).

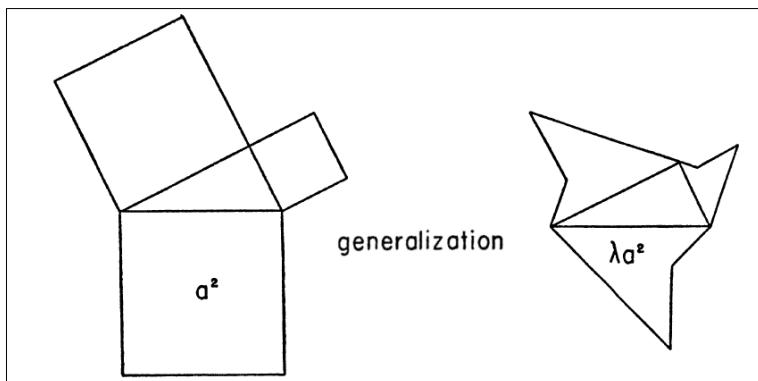


FIGURA 2: Representação geométrica do Teorema de Polya
FONTE: Adaptado de Polya (1948, p.242)

O teorema ilustrado acima não tão conhecido quanto o de Pitágoras e denomina-se Teorema de Polya (Polya, 1948). Ele assegura que se A é a área de uma

⁴ <https://www.geogebra.org/m/newtzzak>

figura construída sobre a hipotenusa e B e C são as áreas de figuras construídas sobre os catetos, e essas figuras são semelhantes, tem-se $A = B + C$.

Figuras semelhantes são os elementos principais do Teorema de Polya. É interessante observar que ao realizar a pesquisa que deu origem ao presente artigo, a palavra figura é amplamente usada, porém não foi encontrada na literatura a sua definição, de forma a ser possível utilizá-la em um nível escolar básico. Desta forma, estabeleceu-se o conceito de figura, em uma concepção generalizada, conforme a definição a seguir. Assim, define-se uma figura como uma parte do plano limitada por uma curva contínua (sem quebras), fechada e sem auto interseção, juntamente com essa curva (que é o bordo da figura).

Olhando para a matemática em nível superior, “uma curva contínua, fechada e sem auto interseção é denominada curva de Jordan” (Alencar, Santos e Neto, 2020, p.168). Em Geometria Diferencial, o Teorema de Jordan afirma, em linhas gerais, que uma curva de Jordan divide o plano em duas componentes conexas não vazias, uma região interior, envolvida pela curva, e outra exterior. Esse teorema cuja compreensão é simples, mas a demonstração nem tanto, assegura que a definição dada acima está bem-posta.

Assim, serão consideradas figuras: a parte interior, juntamente com o bordo, de polígonos, elipses, círculos e de qualquer curva fechada e simples, que pode ter formas bem diversificadas, o que torna ainda mais interessante o Teorema de Polya diante da diversidade de figuras para as quais ele vale.

Outro conceito importante destacado no teorema é o de figuras semelhantes. Ao trabalhar esse conceito no ensino básico, delimita-se esse conceito apenas ao de semelhança de triângulos. Porém, para compreender o Teorema de Polya em sua generalidade, necessita-se a definição de semelhança em um contexto da matemática superior, e esse é dado como segue.

Seja r um número real positivo. Uma semelhança de razão r é uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que multiplica por r o comprimento \overline{PQ} do segmento PQ , formado por dois pontos quaisquer P e Q do plano \mathbb{R}^2 , ou seja, f cumpre a condição $\overline{(f(P)f(Q))} = r\overline{(PQ)}$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$. (Lima, 2013, p.157)

Além disso, “duas figuras F e F' , contidas no plano \mathbb{R}^2 , são semelhantes quando existe uma função de semelhança $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(F) = F'$ ” (Lima, 2013, p.159). Por exemplo, dois círculos são sempre semelhantes, dois polígonos regulares com mesmo número de lados são semelhantes, e são semelhantes duas figuras, tais que uma seja uma redução ou ampliação da outra.



Para um suporte matemático à demonstração do Teorema de Polya, será necessário utilizar alguns resultados sobre semelhança e figuras semelhantes. O enunciado dos resultados, bem como suas demonstrações são baseadas em Lima (2013).

- Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança e P, Q pontos distintos do \mathbb{R}^2 . Se $f(P) = P'$ e $f(Q) = Q'$, então f transforma todo ponto R do segmento PQ , no ponto $f(R) = R'$ do segmento $P'Q'$.
- Toda semelhança é uma bijeção.
- Toda semelhança transforma uma reta em outra reta.
- Toda semelhança $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.
- Toda semelhança $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas paralelas em retas paralelas.
- Toda semelhança $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva qualquer ângulo.
- Toda semelhança $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de razão r transforma um polígono em outro que lhe é semelhante, isto é, os ângulos correspondentes do polígono e de sua imagem são congruentes e os segmentos correspondentes do polígono e de sua imagem são proporcionais, com razão de proporcionalidade r .

Como o Teorema de Polya refere-se à área de quaisquer figuras semelhantes entre si, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, existe a necessidade de enunciar o teorema a seguir, que relaciona as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer. No ensino básico, esse Teorema é comumente demonstrado apenas para figuras poligonais semelhantes e não no caso geral. Em Lima (2012) pode-se encontrar uma demonstração do caso geral, mas no que segue apresenta-se uma demonstração alternativa, seguindo a generalidade do que se admitiu como figura e os resultados anteriores sobre semelhança. O enunciado é o que segue:

Teorema 1: *Se duas figuras, de áreas A e B , são semelhantes com razão de semelhança $r > 0$, então $\frac{B}{A} = r^2$.*

Para demonstrá-lo, por simplificação, A e B denotarão cada uma das figuras e suas respectivas áreas, como ilustra a Figura 3.



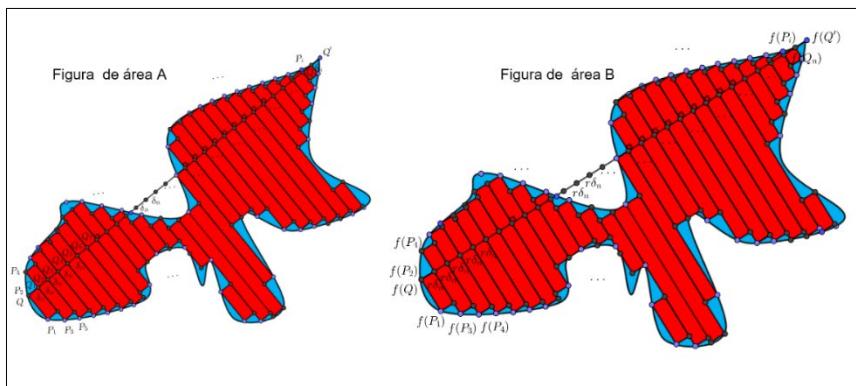


FIGURA 3: Figuras Semelhantes⁵

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

E, as construções geométricas que seguem são possíveis diante dos resultados listados anteriormente. Segue a demonstração:

Seja $f: A \rightarrow B$ como a função de semelhança entre A e B . Logo, se $S, S' \in A$, então $\overline{f(S)f(S')} = r\overline{SS'}$. Consideram-se⁶ os pontos Q e Q' do bordo de A tal que $\overline{QQ'} = \text{diam}(A)$, onde $\text{diam}(A)$ é o diâmetro da figura A , ou seja, o comprimento do maior segmento de reta com extremos no bordo de A .

Logo, $\overline{f(Q)f(Q')} = \text{diam}(B)$, onde $\text{diam}(B)$ é um diâmetro da figura B . No que segue, divide-se o segmento QQ' em n subsegmentos de mesmo comprimento $\delta_n = \overline{QQ'}/n$ e extremos denotados por Q_i , enumerados da esquerda para a direita, de forma crescente. Assim, o segmento $f(Q)f(Q') \subset B$ será dividida em n subsegmentos congruentes, de extremos $f(Q_i)$ e comprimento $r\delta_n$. E, por cada ponto $Q_i \in \overline{QQ'}$, traçam-se retas perpendiculares ao segmento QQ' . Em B isso gera retas perpendiculares ao segmento $f(Q)f(Q')$, passando por cada $f(Q_i)$.

Sejam, na figura A , os pontos P_i da intersecção das referidas retas perpendiculares com o seu bordo. Olhando de baixo para cima, esses pontos geram segmentos P_iP_{i+1} perpendiculares ao diâmetro QQ' . Assim, consideram-se todos os retângulos R_i de largura δ_n e altura dadas por segmentos P_iP_{i+1} que estejam contidos em A .

Logo, a função f faz corresponder os retângulos $R_i \subset A$ a retângulos $R'_i = f(R_i)$ de largura $r\delta_n$ e altura $f(P_i)f(P_{i+1})$ contidos em B . Dessa forma, considera-se, sem perda de generalidade, um dos retângulos R em A , de base δ_n e altura $\overline{P_3P_4}$. Sua área é dada por $R = \overline{P_3P_4} \cdot \delta_n$. Esse retângulo é levado por f no retângulo

⁵ <https://www.geogebra.org/m/gv3ua3rw>

⁶ A existência dos pontos Q e Q' está assegurada pelo fato da função distância ser contínua e estar definida no conjunto compacto A (Lima, 2020).

correspondente R' em B , tal que $R' = \overline{f(P_3)f(P_4)} \cdot \delta_n = r \cdot \overline{P_3P_4} \cdot r\delta_n = r^2 \cdot \overline{P_3P_4} \cdot \delta_n = r^2 R$. Logo, $\frac{R'}{R} = r^2$

Observa-se que a mesma igualdade é válida para todos os retângulos R_i contidos em A e para suas respectivas imagens R'_i em B . Assim, para uma quantidade finita de retângulos temos $\sum_{R' \subset B} R'_i = \sum_{R_i \subset A} r^2 R_i$. Como a área de uma figura é o limite, quando $n \rightarrow \infty$, da soma das áreas desses retângulos inscritos em cada figura, temos que $B = \lim \sum_{R' \subset B} R'_i = \lim \sum_{R_i \subset A} r^2 R_i = r^2 \lim \sum_{R_i \subset A} R_i = r^2 A$. E, portanto, $\frac{B}{A} = r^2$, conforme o enunciado.

De posse desse teorema será enunciado e apresentada uma demonstração do Teorema de Polya, cujo enunciado é o que segue:

Teorema de Polya (Polya, 1948): *Sejam A , B e C figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo. Então a área da figura A é a soma das áreas das figuras B e C , ou seja, $A = B + C$.*

Para demonstrá-lo, denota-se A , B e C as áreas das figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e os catetos, b e c , do triângulo retângulo. Pelo Teorema 1, anteriormente demonstrado, é fato que:

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ e } \frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

A conclusão decorre do Teorema de Pitágoras:

$$B + C = \left(\frac{b}{a}\right)^2 A + \left(\frac{c}{a}\right)^2 A = A \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2}\right) = A \left(\frac{a^2}{a^2}\right) = A$$

Portanto $B + C = A$.

2. O GeoGebra e uma geometrização dinâmica dos teoremas de Pitágoras e de Polya.

Para quem não conhece um SMD, como o GeoGebra, em um primeiro olhar parece ser apenas um editor gráfico que permite desenhar diagramas geométricos na tela do computador ou de dispositivos móveis. No entanto, a essência desse sistema extrapola a mera capacidade de criar desenhos; os elementos geométricos são constantemente reconfigurados, preservando todas as relações geométricas declaradas durante sua construção, bem como preservando as propriedades geométricas implícitas desses elementos.



Portanto, as figuras geradas em um SMD possuem uma natureza distinta daquelas criadas com lápis e papel. Ou seja, a diferença fundamental entre realizar uma construção geométrica utilizando papel e lápis ou material concreto e utilizando um SMD é o dinamismo. Como as construções são dinâmicas, as figuras na tela adquirem uma temporalidade: não são mais estáticas, mas móveis, e, portanto, suas propriedades ficam presentes em todas as posições possíveis que as figuras assumam. Na concepção de Mathias, Silva e Leivas (2019, p.63) “devido a esse dinamismo proveniente das tecnologias digitais, é possível aliar as demonstrações matemáticas ou, até mesmo, as resoluções de problemas, a animações”. Assim, no que segue, serão apresentadas o que denominamos de geometrização do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Polya, usando animações produzidas no Software GeoGebra.

Para trabalhar o Teorema de Pitágoras, optou-se por apresentá-lo tal como ilustra a Figura 4.

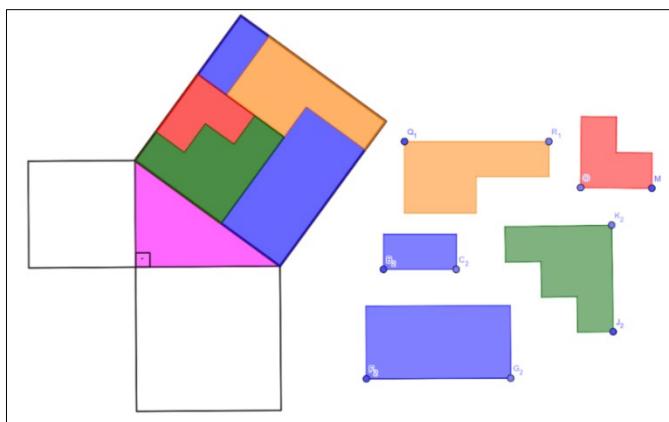


FIGURA 4: Quebra-cabeça para geometrizar o Teorema de Pitágoras⁷.

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Nesse caso, iniciou-se a construção usando um triângulo retângulo e de quadrados sobre os lados do triângulo. Em seguida, elaborou-se um quebra-cabeça de forma que as peças que formam o quadrado (de área A) construído sobre a hipotenusa se encaixem nos quadrados de áreas B e C, construídos sobre os catetos do triângulo retângulo, conforme ilustra a Figura 5.

⁷ <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/uesxzh6c>

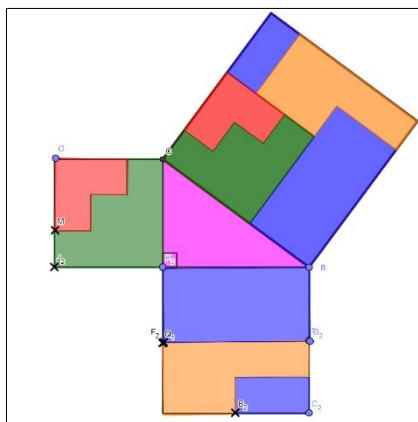


FIGURA 5: Quebra-cabeça com peças poligonais para verificar o Teorema de Pitágoras⁸.
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Observa-se que a ideia de utilizar quebra-cabeças para ilustrar a veridicidade do Teorema não é novidade, isso por muitas vezes é realizado utilizando material concreto e recortes como apresentado em Benedetti, Gil e Techera(1993) e Leivas(2017). Porém, o que está sendo proposto é a construção de tais atividades, utilizando um SMD.

Conforme enfatizado, a distinção do que foi realizado em trabalhos anteriores para o aqui apresentado é o dinamismo das construções. No caso, os elementos que compõem a construção preservam suas propriedades geométricas e ao movimentarmos o controle deslizante alteramos a medida dos lados do triângulo retângulo e as peças que compõem os quadrados sobre os lados do triângulo retângulo são alteradas, porém a relação $A = B + C$ é mantida (Figura 6).

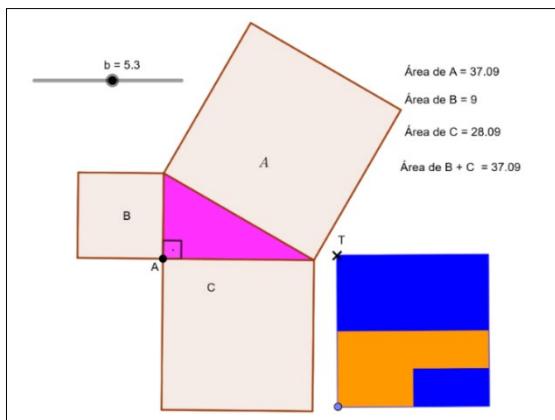


FIGURA 6: Animação do Teorema de Pitágoras⁹.
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

⁸ <https://www.geogebra.org/m/f6czq5ak>

⁹ <https://www.geogebra.org/m/vqr5jec#material/vpcft4ns>

Além disso, a partir dessa construção, é possível despertar conjecturas sobre qual a relação existente entre as figuras construídas sobre os lados do triângulo. No Ensino Básico observa-se, em geral, que os professores são orientados pelas diretrizes atuais a trabalhar apenas com a semelhança de triângulos. Portanto, apresentar atividades como aquela exemplificada é uma oportunidade de introduzir, de forma intuitiva, o conceito de figuras semelhantes. Com esse conceito estabelecido, um questionamento natural é se a relação $A = B + C$ vale para figuras semelhantes quaisquer desenhadas sobre os lados do triângulo, além de quadrados. Esse é a passagem para chegar ao Teorema de Polya, como generalização do Teorema de Pitágoras.

No que segue, apresentam-se algumas situações que ilustram o Teorema de Polya. Em particular, para ilustrar que a área do hexágono construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos hexágonos construídos sobre os catetos, usamos a construção da Figura 7, pois ao movimentarmos o controle deslizante as áreas dos hexágonos se alteram e a relação de áreas permanece, ou seja, $A = B + C$.

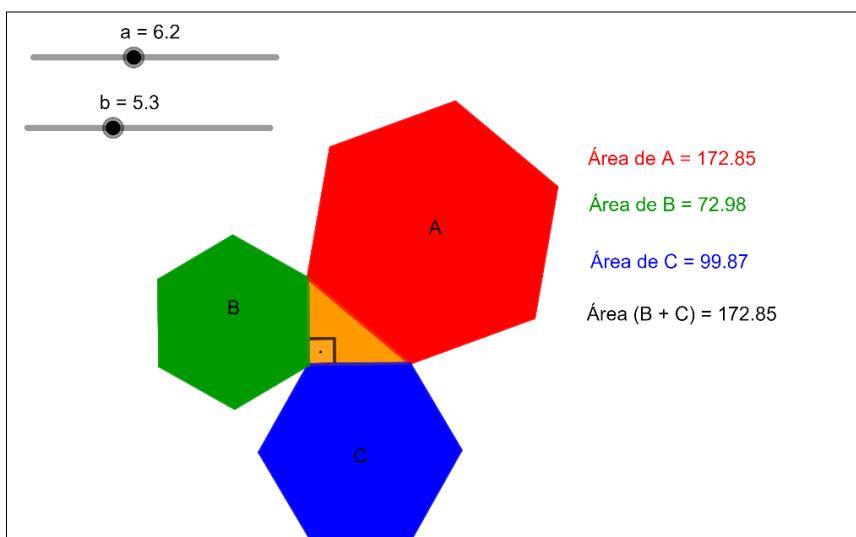


FIGURA 7: Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo¹⁰.

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Em um segundo momento, inspirados em Strick(2021) foram explorados casos particulares utilizando polígonos regulares (Figura 8).

¹⁰ <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/g7eqqfrg>

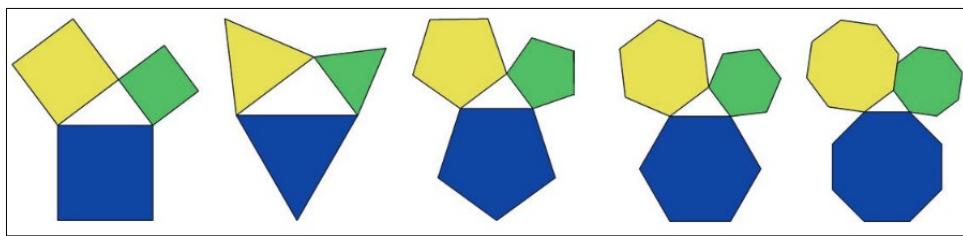


FIGURA 8: Teorema de Polya – polígonos regulares.
FONTE: Adaptado de Strick (2021, p. 341)

Conforme Strick (2021) existe uma relação entre a área do polígono regular e o quadrado do lado em que ele está construído, ou seja, se X é a área do polígono regular construído sobre o lado de medida x , então $X = rx^2$. No caso do quadrado, a relação é óbvia e $r = 1$. A Figura 9 ilustra a construção realizada utilizando o GeoGebra que verifica a relação citada.

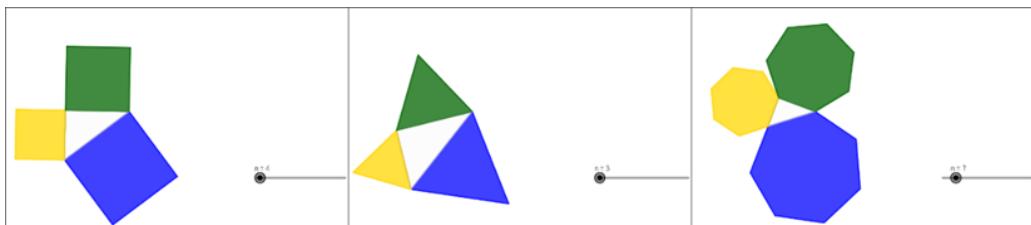


FIGURA 9: Relação entre a área e o quadrado do lado do polígono regular¹¹
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Considerando os triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo, similar ao que foi realizado anteriormente, elaborou-se um quebra-cabeça como ilustra a Figura 10.

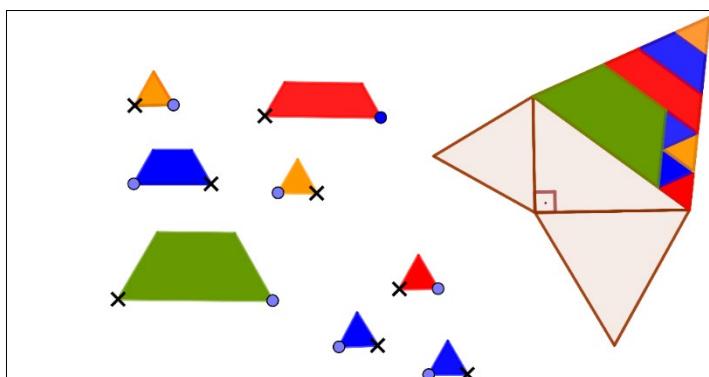


FIGURA 10: Quebra-cabeça para o Teorema de Polya¹²
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

¹¹ <https://www.geogebra.org/m/ugfbcm46>

¹² <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/bmfnbqv5>

O objetivo das peças desse quebra-cabeça é cobrir os triângulos equiláteros, construídos sobre os catetos. Observa-se que as medidas utilizadas nesse quebra-cabeça são para triângulos de lados 3, 4 e 5, mas é possível generalizar para um triângulo retângulo qualquer. Nesse caso verifica-se que a área do triângulo equilátero sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos equiláteros sobre os catetos do triângulo retângulo (Figura 11).

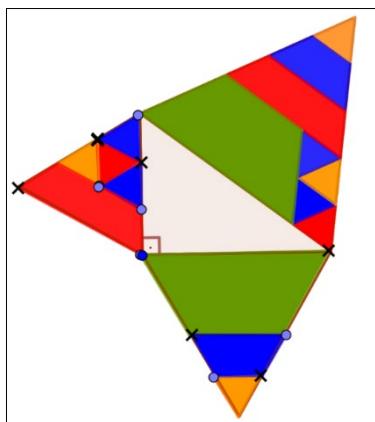


FIGURA 11: Montagem do quebra-cabeça para o Teorema de Polya¹³.

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Conforme consta Singh (2017) é possível mostrar a relação entre as áreas a partir de semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo (Figura 12).

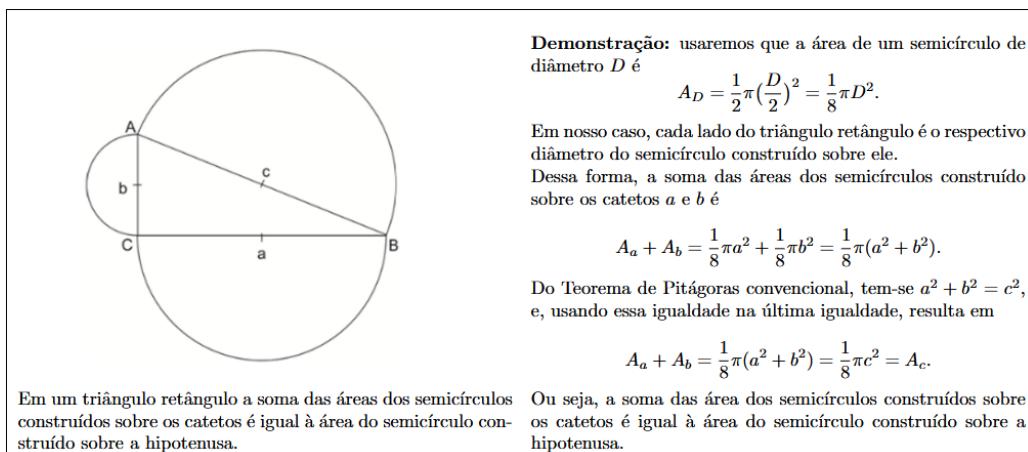


FIGURA 12: Demonstração do Teorema de Polya a partir de semicírculos.

FONTE: Adaptado de Singh (2017, p.2518)

Assim, construiu-se uma versão dinâmica do diagrama ilustrado acima, utilizando o SMD GeoGebra (Figura 13).

¹³ <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/bmfnbqv5>

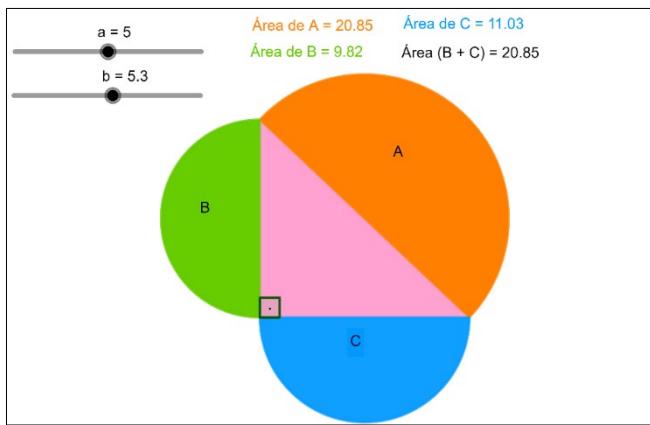


FIGURA 13: Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.¹⁴
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

A construção ilustrada acima, possui o objetivo de verificar que a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos. Assim, ao movimentar os controles deslizantes as áreas dos semicírculos se alteram e a relação de áreas permanece. Em Oliveira (2023), mostra-se essa relação entre as áreas, de figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo com quadrados, triângulos equiláteros e semicírculos. Dessa forma, é possível deduzir essa relação com a montagem de figuras, como ilustra a Figura 14.

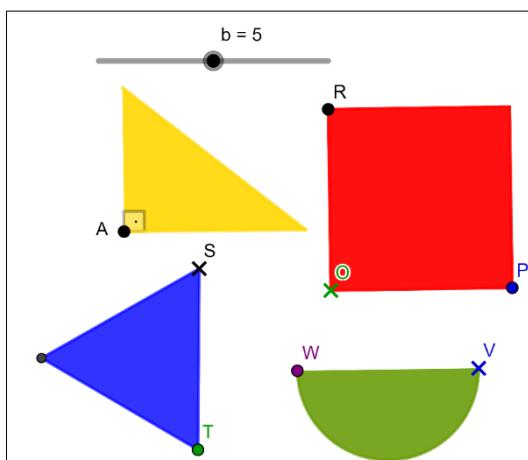


FIGURA 14: Peças para montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo¹⁵.
FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

¹⁴ <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/k9aqtc2m>

¹⁵ <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/x2qhkea3>

Para verificar a validade do Teorema, deve-se unir o quadrado vermelho com o cateto que possui a mesma medida de seu lado. Após isso feito, surgirá sobre a hipotenusa e sobre o outro cateto quadrados vermelhos. Do mesmo modo, dispõe-se o triângulo e o semicírculo de modo a formar a Figura 15.

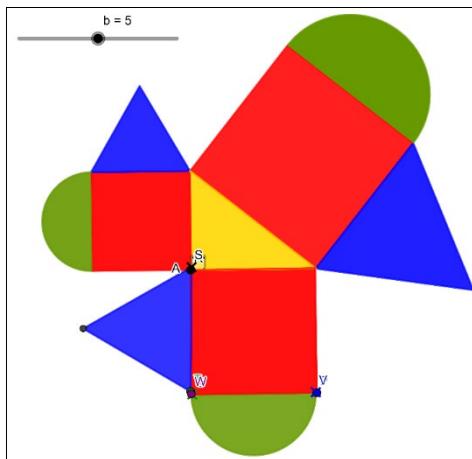


FIGURA 15: Exemplo de montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo¹⁶.

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

Nessa construção, a ideia é explorar a validade do Teorema para outros tipos de figuras construídas a partir dos lados do triângulo retângulo. Um outro exemplo, está ilustrado na Figura 16 que ilustra um quebra-cabeça que permite verificar a veracidade do Teorema de Polya.

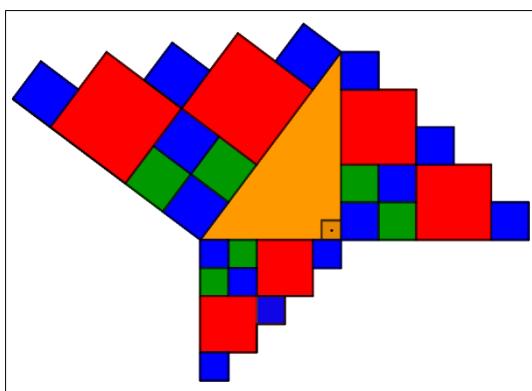


FIGURA 16: Quebra-cabeça para verificar o Teorema de Polya¹⁷.

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

¹⁶ <https://www.geogebra.org/m/kejcgd7b>

¹⁷ <https://www.geogebra.org/m/b6yh3jha>

Assim como na atividade anterior, como a finalidade da atividade é verificar a veracidade do teorema de Polya, deve-se unir os pontos de mesma cor sobre a hipotenusa do triângulo retângulo e, dessa forma, irão surgir as figuras semelhantes sobre os catetos (Figura 17).

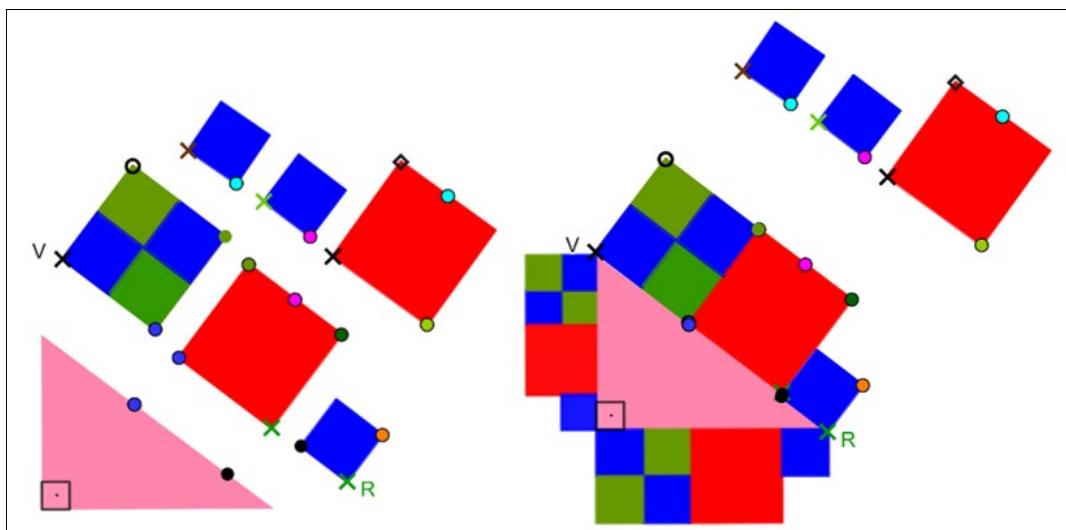


FIGURA 17: Quebra-cabeça para o Teorema de Polya¹⁸.

FONTE: Sistematizado pelos autores no software GeoGebra

As figuras apresentadas neste artigo podem ser utilizadas para verificar os teoremas de Pitágoras e de Polya em sua forma geométrica, possibilitando, assim, uma forma visual e dinâmica desses teoremas com o uso do software GeoGebra.

Conclusões

Durante muitos séculos, a geometria foi a base de toda ciência. Contudo, ao confrontar a necessidade de superar as limitações da percepção e da intuição para estabelecer um embasamento teórico, a geometria acabou por ceder sua posição de destaque para a álgebra e a análise. A partir desse fato, gerou-se uma certa desconfiança em relação à geometria em favor da álgebra como principal ferramenta para demonstrar resultados. Essa mudança pode ter sido a responsável pelo aparecimento de certo descaso da geometria nos espaços educativos. Porém, o potencial dos recursos tecnológicos tem, de certa forma, impulsionado o ressurgimento dos aspectos visuais e geométricos de vários resultados matemáticos, suscitando experimentações e conjecturas. O uso de tais ferramentas parece fazer surgir um novo equilíbrio aos processos de visualização e justificação.

¹⁸ <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec#material/betubsts>

Nesse artigo, levando em consideração o que acabamos de citar, optamos em um primeiro momento em apresentar a teoria necessária ao entendimento dos teoremas demonstrados. Para este fim, utilizou-se de um SMD, uma vez que tais ferramentas transcendem, principalmente em uma sala de aula, o poder meramente ilustrativo de figuras, tornando-se um poderoso acessório para o entendimento dessa teoria. A propósito, nesse trabalho, o GeoGebra tem o caráter de tornar a visualização funcional, de modo que a exploração, conjectura, previsão e verificação surjam naturalmente. Como auxiliar para realizar cada uma dessas etapas do ensino, recomendamos àqueles que optem por utilizar as atividades aqui expostas, apresentar a formulação de proposições geométricas e, para tal, apresentar algumas atividades e questionamentos que já foram utilizados em sala, como as expostas em Oliveira (2023).

Ao longo do que foi exposto, abordamos as formas geométricas do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Polya. Tal olhar, pensando no que se denominou *geometrização* poderá despertar um maior interesse por esses resultados, visto que proporcionam um entendimento conceitual e visual significativo desses teoremas, além de suas versões puramente algébrica. As atividades produzidas a partir de construções com o GeoGebra, ilustradas nesse artigo, podem trazer um entendimento de que a tão conhecida equação $a^2 = b^2 + c^2$, em verdade, está relacionada a áreas de figuras planas, generalizando-se além das de quadrados, não se configura apenas como uma equação algébrica envolvendo letras, muitas vezes citadas sem sua devida significação.

Referências

- ALENCAR, H. SANTOS, W., NETO, G. S. **Geometria diferencial de curvas no R2.** Coleção Coletâneas de Matemática; 04, SBM, Rio de Janeiro: 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 17 mar. 2025.
- BENEDETTI, M.; GIL, P. P.; TECHERA, S. I. C. **Atividades em geometria usando recortes: parte 1-teorema de Pitágoras.** Cadernos de matemática e estatística. Série B, Trabalho de apoio didático. Porto Alegre, 1993.
- CUOCO, Al; GOLDENBERG, E. Paul; MARK, June. Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 15, n. 4, p. 375-402, 1996.
- GRAVINA, M. Al. et al. **Geometria dinâmica na escola. Matemática, Mídias Digitais e Didática-tripé para a formação de professores de Matemática.** Porto Alegre. Cap, v. 2, p. 26-45, 2011.



LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da teoria de Van Hiele com alunos de pós-graduação – a generalização do teorema de Pitágoras. **Vidya**, v. 37, n. 2, p. 515-531, 2017.

LIMA, E.L **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 6a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2020.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. da; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019.

OLIVEIRA, I. M. S. **Desalgebrização do Teorema de Pitágoras e sua extensão com o Teorema de Pólya**. Dissertação (Mestrado em Matemática - Profmat) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande - Paraíba, p.170. 2023.

POLYA, G. **How to solve it**. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1973.

POLYA, George. Generalization, specialization, analogy. **The American Mathematical Monthly**, v. 55, n. 4, p. 241-243, 1948.

RATNER, B. Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him. **Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing**, v. 17, p. 229-242, 2009.

STRICK, H. K. **Mathematics is Beautiful**. Springer Berlin Heidelberg, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62689-4_17

SINGH, J. P. Concept of Pythagorean Theorem's New Proof and Pythagorean's Triple with Ancient Vedic Investigation. **International Journal Of Scientific Research and Education**, v. 5, n. 04, p. 6326-38, 2017.

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e áreas**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2010.

Enviado: 16/05/2024

Aceito: 18/03/2025

