https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p210-224

Duplicando o cubo com o GeoGebra[1]

Duplicating the cube with GeoGebra

OLGA HARUMI SAITO [2]
https://orcid.org/0000-0001-7079-4502

KATIANE SOUZA DE OLIVEIRA [3]
https://orcid.org/0000-0003-3250-0109

RUDIMAR LUIZ NÓS[4]
https://orcid.org/0000-0002-9219-0811

RESUMO

Neste trabalho, apresentam-se experiências dinâmicas que abordam as duas estratégias propostas pelo matemático grego Menaecmo para duplicar o cubo por meio de seções cônicas, estabelecendo uma relação entre Geometria Analítica e História da Matemática. Tais estratégias permitem determinar a medida da aresta do cubo duplicado utilizando duas parábolas ou uma parábola e uma hipérbole. As atividades dinâmicas, organizadas com o GeoGebra e acessadas por links externos, fazem uso de controles deslizantes para estabelecer/variar os parâmetros que satisfazem as duas condições de Menaecmo. As atividades foram elaboradas com o intuito de contextualizar o estudo das seções cônicas nos cursos de Geometria Analítica da Licenciatura em Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, podendo ser adaptadas para o Ensino Médio. Conclui-se que o GeoGebra é a ferramenta ideal para representar dinamicamente a duplicação do cubo.

Palavras-chave: *parábola; hipérbole; História da Matemática.*

ABSTRACT

In this work, we present dynamic experiments addressing the two strategies proposed by the Greek mathematician Menaecmo to duplicate the cube through conic sections, thus relating analytical geometry and the history of mathematics. These strategies allow us to determine the edge measurement of the duplicate cube using two parabolas or a parabola and a hyperbola. In dynamic activities, organized with GeoGebra and accessed via external links, we employ sliders to establish/vary the parameters that satisfy Menaecmo's two conditions. The activities were designed to contextualize the study of conic sections in the analytical geometry courses of the Mathematics-Teaching Degree and the Professional Master's Degree in Mathematics on a National Network – PROFMAT. The activities can also be adapted for High School. We conclude that GeoGebra is the ideal tool to represent cube duplication dynamically.

Keywords: *parabola; hyperbola; history of mathematics.*

[1] Apoio: UTFPR, Campus Curitiba
[2] UTFPR, Curitiba-PR – ohsaito@gmail.com
[3] Colégio Estadual Rocha Pombo, Morretes-PR – katimariaoliveira@hotmail.com
[4] UTFPR, Curitiba-PR – rudimarnos@utfpr.edu.br

Introdução

A quadratura do círculo, a trisseção do ângulo e a duplicação do cubo (Klein, 1897) são problemas geométricos impossíveis de serem solucionados apenas com régua e compasso. A Teoria de Galois (1811-1832), desenvolvida no século XIX, forneceu a prova matemática definitiva da impossibilidade dessas construções. Entretanto, a busca pela solução desses problemas influenciou a geometria grega e fomentou diversas descobertas, tais como as seções cônicas, as curvas cúbicas e quárticas e diversas curvas transcendentes (Eves, 2011).

> Os matemáticos gregos definiram três grandes problemas clássicos em geometria: quadrar o círculo, dividir um ângulo em três partes e dobrar o cubo, tudo isso feito somente com régua e compasso. Esses problemas dominariam os matemáticos por 2200 anos, até se provar que todos eles eram impossíveis (Rooney, 2012, p. 80).

Em 1837, o matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) provou que a trisseção do ângulo e a duplicação do volume do cubo não podiam ser solucionadas com construções com régua e compasso. Contudo, há outras maneiras de duplicar o cubo, como, por exemplo: o uso das seções cônicas derivadas da proporção de Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.) nas estratégias propostas pelo matemático grego Menaecmo (c. 350 a.C.) (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017; Oliveira; Nós; Saito, 2023; Saito, 1995); o emprego de uma extensão do compasso (*compass extent*) definida pela relação entre as medidas k da aresta e V do volume em uma sequência de n cubos (Willis, 2015); a utilização do GeoGebra (GeoGebra, 2024a, 2024b) para construir geometricamente a razão $\sqrt[3]{2}:1$, onde $2^{1/3}$ é a constante deliana (Alex; Mutembei, 2017).

Assim, a duplicação do volume do cubo, também conhecida como problema deliano[5], constitui-se um excelente tema para o professor de matemática da Educação Básica e do Ensino Superior contextualizar conteúdos, tais como: relações e funções, volume de sólidos geométricos e curvas determinadas por seções cônicas. Quanto a estas, as estratégias de Menaecmo possibilitam explorar conceitos e propriedades pertinentes à parábola e à hipérbole, constituindo tópico interessante e apropriado à construção de atividades/experiências dinâmicas no GeoGebra (Lago; Nós, 2020; Nós; Sano; Silva, 2024; Silva; Nós; Sano, 2023; Saito; Nós; Oliveira, 2025). Ainda, o tema permite revisitar a história da matemática (Contador, 2023; Domingues, 1998; Eves, 2011; Klein, 1897; Rooney, 2012; Saito, 1995), particularmente do período grego que antecede a era cristã.

Desta forma, propomos neste trabalho atividades dinâmicas que investigam as estratégias de Menaecmo para a duplicação do cubo, ou seja, dado um cubo de aresta

[5] Deliano: de Delos, uma pequena ilha grega no mar Egeu que foi o suposto local de nascimento de Apolo e Artemis.

k e volume k^3, determinar a medida da aresta do cubo de volume $2k^3$. Essas atividades foram construídas no GeoGebra 2D e 3D com o intuito de contextualizar o estudo das seções cônicas nos cursos de Geometria Analítica da Licenciatura em Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, e também podem ser adaptadas para o Ensino Médio. Na organização das experiências dinâmicas, acessadas por links externos, utilizamos controles deslizantes para definir/variar os parâmetros que satisfazem as condições de Menaecmo.

1. A duplicação do cubo: história

Para Eves (2011, p. 135),

> [...] há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco.

Diante desse fato, o rei Minos ordenou que o túmulo do seu filho Glauco fosse duplicado. Para tanto, por influência do poeta, o rei acreditou que bastaria duplicar as dimensões do túmulo, isto é, comprimento, largura e altura.

> Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. Nenhum progresso parece ter havido quanto à solução até que, algum tempo mais tarde, Hipócrates descobriu sua famosa redução [...] (Eves, 2011, p. 135).

Após o dilema do rei Minos, a duplicação do cubo voltaria à tona com a construção do altar para o deus grego Apolo, considerado patrono da música e da arte, com poderes sobre a morte. Em seu templo, construído na ilha grega Delos, Apolo (ou deus do Sol) era venerado por aqueles(as) que desejavam suas previsões. A duplicação do altar de Apolo é relatada no Problema 1 segundo Contador (2023).

Problema 1. Quando uma peste assolou Atenas, dizimando cerca de um quarto de sua população, inclusive fazendo Péricles uma de suas vítimas, os habitantes, desesperados, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo havia um altar em forma de cubo e, em troca do fim da peste, a divindade fez um pedido: erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará.

Segundo Domingues (1998), Hipócrates de Quio reduziu o problema da duplicação do cubo às médias proporcionais x e y aos segmentos de comprimento k e $2k$, ou seja:

$$\frac{k}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2k}. \tag{1}$$

Da proporção (1), segue que:

$$x^2 = ky \Longrightarrow y = \frac{x^2}{k}; \tag{2}$$

$$y^2 = 2kx; \tag{3}$$

$$xy = 2k^2. \tag{4}$$

Substituindo (2) em (4), obtemos que:

$$x^3 = 2k^3;$$

$$x = \sqrt[3]{2}k. \tag{5}$$

Na relação (5), x é a medida da aresta do cubo duplicado enquanto que k é a medida da aresta do cubo original.

Após Hipócrates, outros matemáticos também tentaram solucionar o problema da duplicação do cubo, conforme Eves (2011, p. 135).

> Dessas, uma das mais antigas, e certamente uma das mais notáveis, na forma de uma solução por geometria superior, foi dada por Arquitas (c. 400 a.C.). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cone circular reto! Essa solução lança alguma luz sobre a extensão pouco comum que a geometria deve ter atingido naqueles tempos remotos. A solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época, a Nicomedes. Uma solução ainda posterior foi oferecida por Apolônio (c. 225 a.C.). Dioclés (c. 180 a.C.) inventou uma curva chamada cissoide com o mesmo objetivo. E, obviamente, descobriram-se modernamente muitas soluções mediante curvas planas superiores.

O matemático Menaecmo, discípulo de Eudoxo, amigo de Platão (427-347 a.C.) e membro da Academia de Platão, “[...] fez a descoberta dessas curvas ($x^2 = ky, y^2 = 2kx$ e $xy = 2k^2$) por volta de 360 a.C. e mostrou que a interseção delas daria as médias requeridas no problema, ainda que não construídas com régua e compasso” (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017, p. 146). De acordo com Eves (2011), são duas as contribuições de Menaecmo à solução do problema da duplicação do cubo.

1. Empregam-se duas parábolas, com vértices comuns e eixos perpendiculares, tais que o *latus rectum* (lado reto) de uma é o dobro do *latus rectum* da outra. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (2) e (3), ou seja, $x^2 = ky$

e $y^2 = 2kx$, derivadas da proporção (1) de Hipócrates. A Figura 1 ilustra os elementos de uma parábola.

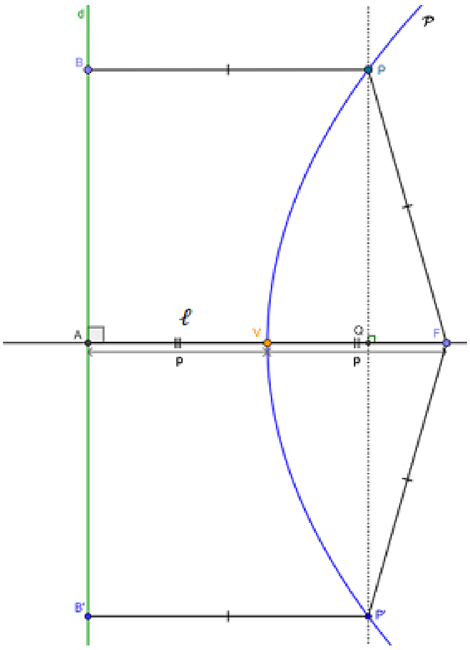

FIGURA 1: Parábola $\mathcal{P}$, de vértice V, foco F, diretriz **d** e reta focal ℓ
FONTE: Oliveira (2023, p. 75)

2. Considera-se a interseção entre uma parábola e uma hipérbole equilátera que tem como assíntotas o eixo da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (2) e (4), ou seja, $x^2 = ky$ e $xy = 2k^2$, derivadas da proporção (1) de Hipócrates. A Figura 2 ilustra os elementos de uma hipérbole.

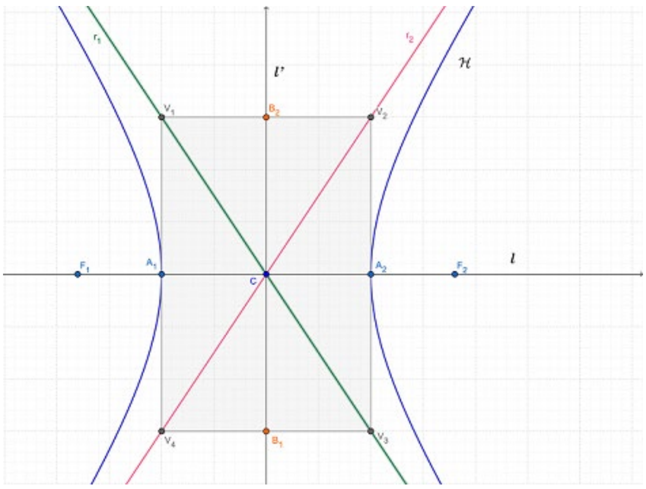

FIGURA 2: Hipérbole $\mathcal{H}$, de centro C, vértices A_1e A_2, focos F_1 e F_2, assíntotas r_1 e r_2, eixo focal ℓ, eixo não focal ℓ' e retângulo base $V_1V_2V_3V_4$
FONTE: Oliveira (2023, p. 71)

Para duplicarmos o volume do cubo empregando as estratégias propostas por Menaecmo, faz-se necessário revisitar os conceitos de parábola e hipérbole, assim como de seus elementos (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017; Oliveira, 2023).

2. A primeira estratégia de Menaecmo no GeoGebra

Iniciamos inserindo as equações das parábolas $x^2 = ky$ (eq1) e $y^2 = 2kx$ (eq2) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra. A Figura 3 ilustra as duas parábolas, que têm vértice comum $V_p = (0,0)$ e eixos perpendiculares, tais que o *latus rectum* $\overline{L_1L_1'}$ de $y^2 = 2kx$ (eq2) é o dobro do *latus rectum* $\overline{LL'}$ de $x^2 = ky$ (eq1). O *latus rectum* de uma cônica é definido como sendo a corda focal, ou segmento de reta que passa por um dos focos da cônica e tem extremidades pertencentes à mesma, cujo comprimento é mínimo (Coxeter, 1969).

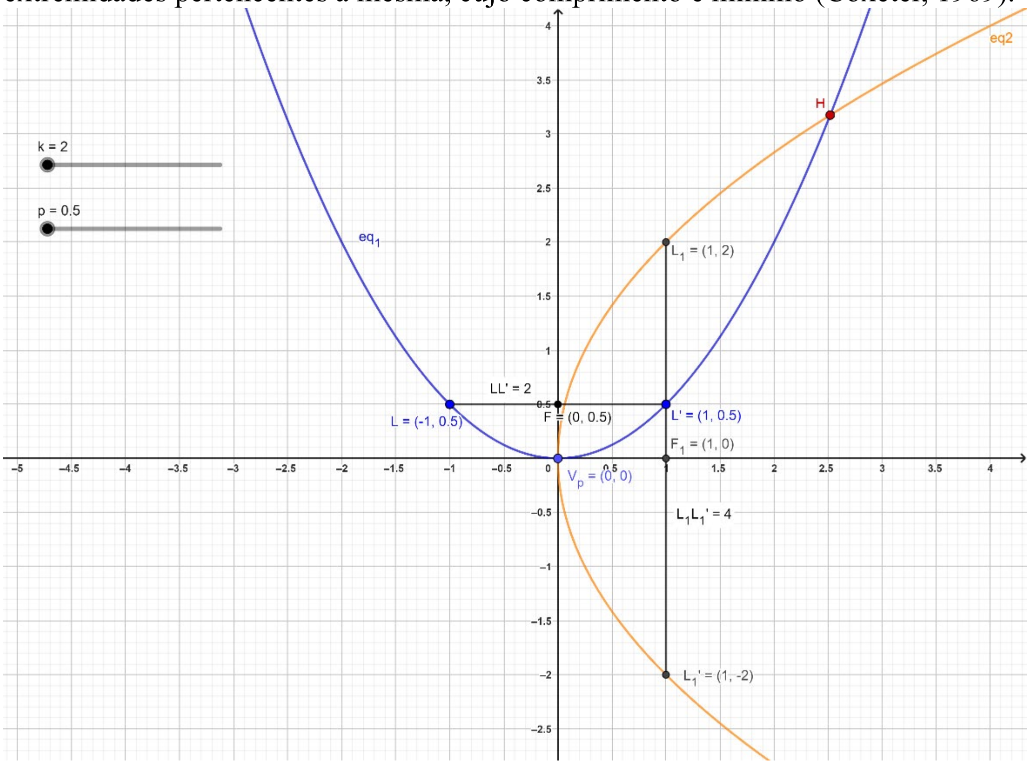

FIGURA 3: *Latus rectum* $\overline{L_1L_1'}$ e $\overline{LL'}$ das parábolas $y^2 = 2kx$ (eq2) e $x^2 = ky$ (eq1), respectivamente, com $k = 3$ e $p = 0{,}5$
FONTE: Oliveira (2023, p. 78)

Na Figura 3, a parábola $x^2 = ky$ (eq1) possui reta focal coincidente com o eixo Oy, isto é, a forma canônica $x^2 = 4py$, sendo o foco $F = (0, p)$, a diretriz $\boldsymbol{d}: y = -p$, o parâmetro $p = 0{,}5$, onde $2p = d(F, \boldsymbol{d})$. Além disso, a parábola $y^2 = 2kx$ (eq2) possui reta focal coincidente com o eixo Ox, ou seja, a forma canônica $y^2 = 4px$, com $p' = 2p$, foco $F_1 = (p', 0)$, diretriz $\boldsymbol{d}: x = -p'$ e parâmetro $2p' =$

$d(F, \boldsymbol{d})$. Assim, o *latus rectum* $\overline{LL'}$ de $x^2 = ky$ (eq1) terá como extremos os pontos $L = (-2p, p)$ e $L' = (2p, p)$, enquanto que o *latus rectum* $\overline{L_1L_1{}'}$ de $y^2 = 2kx$ (eq2) terá como extremos os pontos $L_1 = (p', 2p')$ e $L_1{}' = (p', -2p')$. Deste modo, uma vez que $d(L_1, L_1{}') = 8p$ e $d(L, L') = 4p$, são cumpridas as condições da primeira estratégia de Menaecmo.

Para estabelecer graficamente a aresta do cubo duplicado, precisamos solucionar inicialmente o sistema não linear composto pelas equações $x^2 = ky$ (eq1) e $y^2 = 2kx$ (eq2). Empregando o método da substituição, determinamos o ponto de interseção $H = \left(\sqrt[3]{2}k, \sqrt[3]{4}k\right)$. Inserindo a equação $x = \sqrt[3]{2}k$ (eq3) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra, visualizamos uma reta perpendicular ao eixo Ox e paralela ao eixo Oy, que passa pelo ponto H, como ilustra a Figura 4.

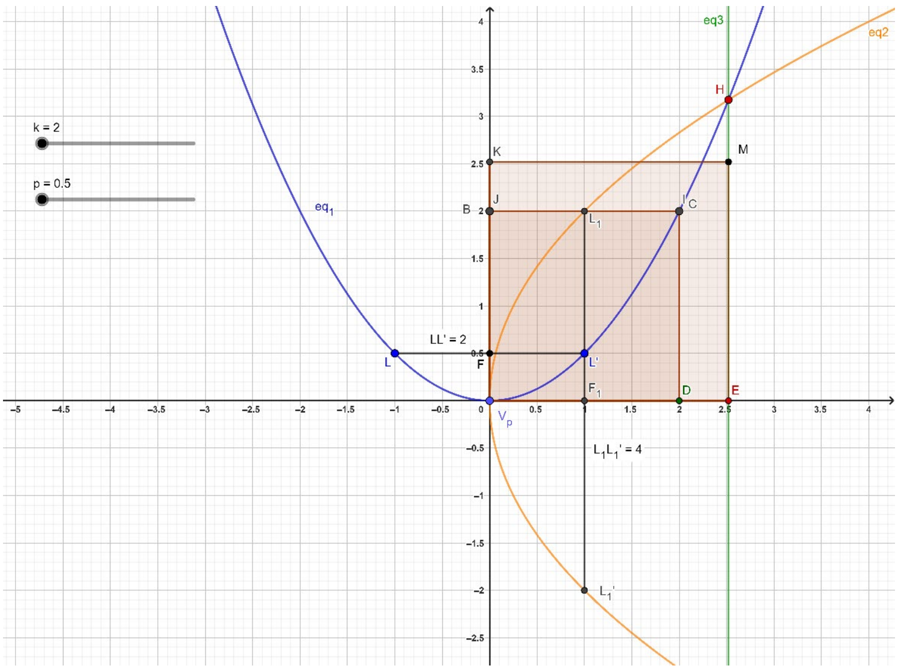

FIGURA 4: Parábolas $y^2 = 2kx$ (eq2) e $x^2 = ky$ (eq1), a reta $x = \sqrt[3]{2}k$ (eq3) e os segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$, de comprimentos k e $\sqrt[3]{2}k$, respectivamente, com $k = 2$
FONTE: Oliveira (2023, p. 80)

Na Figura 4, as medidas dos segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$, onde $D = (k, 0)$ e $E = \left(\sqrt[3]{2}k, 0\right)$, representam, respectivamente, o comprimento k da aresta do cubo e o comprimento $\sqrt[3]{2}k$ da aresta do cubo de volume duplicado. Logo, os quadrados V_pDCB e V_pEMK representam as faces do cubo e do cubo de volume duplicado, respectivamente.

Construímos no GeoGebra uma atividade dinâmica que permite, através de um controle deslizante, alterar o valor da medida k e observar o que ocorre com as parábolas e os segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$. Disponibilizamos essa atividade em

https://www.geogebra.org/calculator/uqpvcbmz.

Usando o GeoGebra na opção de janela 3D, criamos um cubo de aresta k e outro cubo de aresta $\sqrt[3]{2}k$ a partir dos quadrados V_pDCB e V_pEMK, respectivamente, como ilustra a Figura 5.

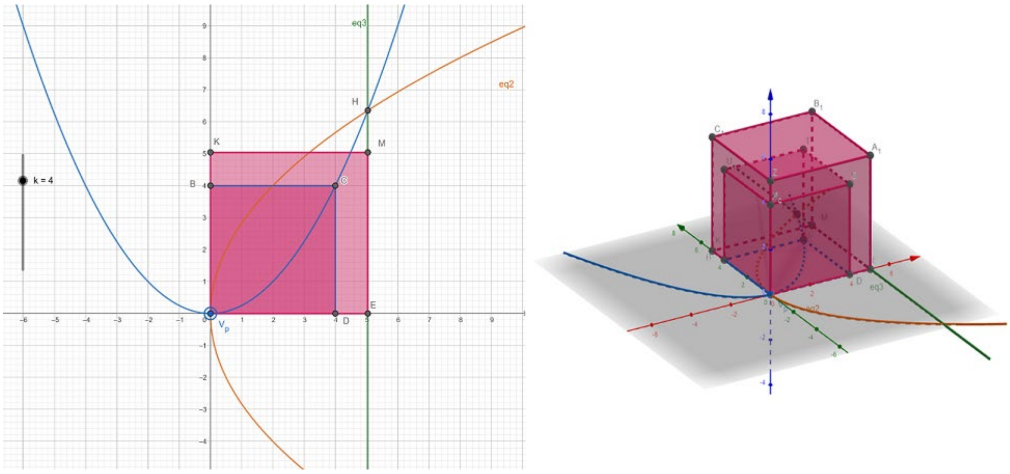

FIGURA 5: Cubos de arestas k e $\sqrt[3]{2}k$, com $k = 4$
FONTE: Oliveira (2023, p. 80)

Assim, dados um cubo $\mathcal{C}$ de aresta k e um cubo $\mathcal{D}$ de aresta $\sqrt[3]{2}k$, temos que o volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{C}$ é $\mathcal{V}(\mathcal{C}) = k^3$ e o volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2k^3$. Portanto: $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2\mathcal{V}(\mathcal{C})$. No link

https://www.geogebra.org/classic/gmsk8jgv,

fornecemos uma atividade construída no GeoGebra que permite observar a duplicação do cubo alterando-se o valor de k no controle deslizante.

3. A segunda estratégia de Menaecmo no GeoGebra

Na construção da segunda estratégia, iniciamos o processo inserindo as equações da parábola $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$) e da hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra, como ilustrado na Figura 6. Nesta, destacamos o ponto H, que representa a interseção da parábola com a hipérbole. O ponto $V_p = (0,0)$ é o vértice da parábola.

Em seguida, é necessário verificar se a hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$) se enquadra nas normas estabelecidas por Menaecmo, ou seja, a hipérbole é equilátera, as assíntotas são o eixo focal da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice $V_p = (0,0)$.

Construindo a hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$), com $k = 2$, no GeoGebra – Figura 6, temos que o eixo focal da parábola $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$) é coincidente ao eixo Oy.

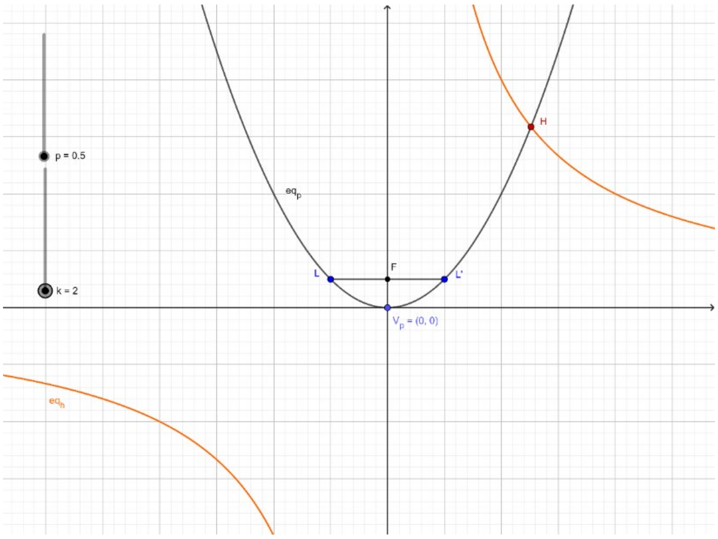

FIGURA 6: Interseção H da parábola $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$) com a hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$), onde $k = 2$ e $p = 0{,}5$
FONTE: Oliveira (2023, p. 82)

Logo, o referido eixo é uma das assíntotas, uma vez que

$$\lim_{x\to 0^-} y = \frac{2k^2}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} y = \frac{2k^2}{x} = +\infty.$$

A outra assíntota corresponde ao eixo Ox, isto porque

$$\lim_{x\to \pm\infty} y = \frac{2k^2}{x} = 0.$$

E o eixo Ox é tangente à parábola $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$) no vértice $V_p = (0,0)$.

Uma hipérbole equilátera tem equação reduzida dada por

$$xy = \frac{1}{2}a^2,$$

onde $d(A_1, A_2) = 2a$ é a distância entre os vértices. Nessa hipérbole, as assíntotas são perpendiculares e o retângulo base é um quadrado (Coxeter, 1969). Como as assíntotas da hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$) são os eixos coordenados e estes são ortogonais, então essa hipérbole é equilátera com $a = 2k$. Desta maneira, são cumpridas as condições da segunda estratégia de Menaecmo.

É possível empregar as ferramentas existentes no GeoGebra para verificar que a medida do lado do quadrado base da hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$) é igual ao quádruplo do *latus rectum* $LL' = 4p$ da parábola $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$). Como a hipérbole está rotacionada, traçamos as bissetrizes em relação aos eixos Ox e Oy e identificamos os vértices A_1 e A_2, como ilustra a Figura 7.

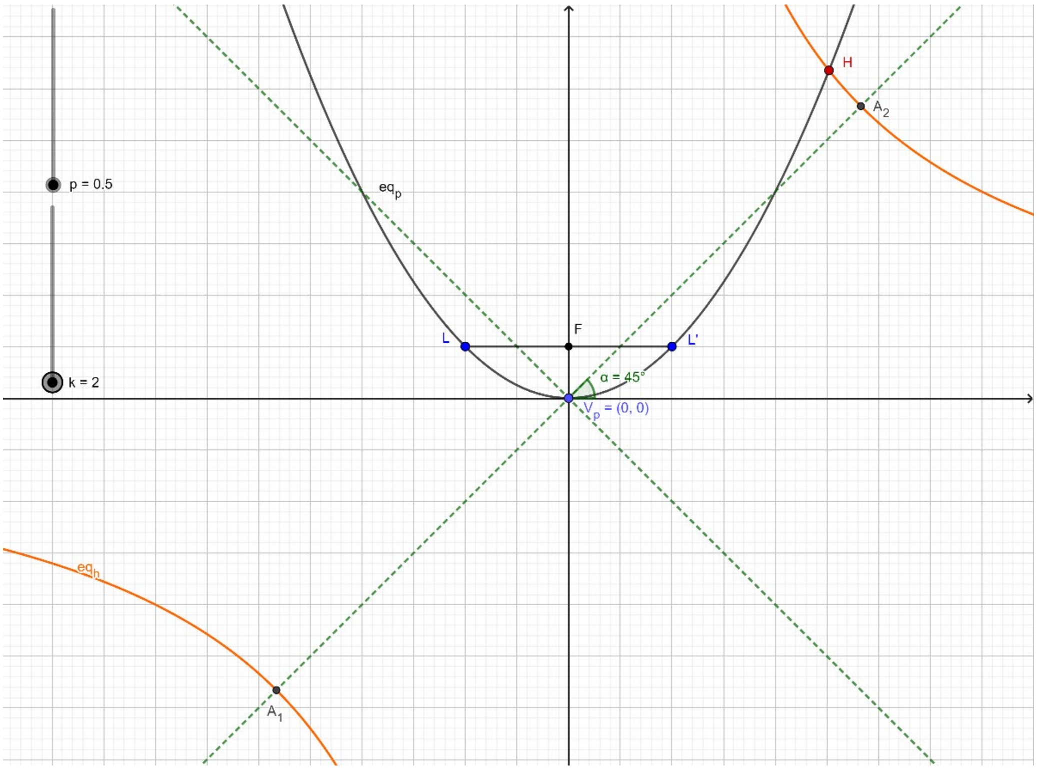

FIGURA 7: Bissetrizes (verde) dos quadrantes definidos pelos eixos ortogonais Ox e Oy
FONTE: Oliveira (2023, p. 83)

Em uma hipérbole equilátera, o retângulo base é um quadrado cujo lado tem medida igual à distância entre os vértices reais A_1 e A_2, ou seja, $d(A_1, A_2) = 2a$. A distância $d(A_1, A_2) = 2a$ corresponde à diagonal (contida em uma das bissetrizes) do quadrado inscrito no quadrado base da hipérbole $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$) – Figura 8. Os vértices do quadrado inscrito correspondem aos pontos médios dos lados do quadrado base, isto é, A_1 e A_2 são vértices opostos do quadrado inscrito. Para $k = 2$, o GeoGebra indica que $d(A_1, A_2) = 2a = 8$ e o *latus rectum* da parábola $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$) é igual a $LL' = 4p = 2$, o que equivale a $d(A_1, A_2) = 4LL'$ ou $d(A_1, A_2) = 16p$. Isto implica em $p = 0{,}5$, que é o parâmetro empregado, conforme ilustra a Figura 8.

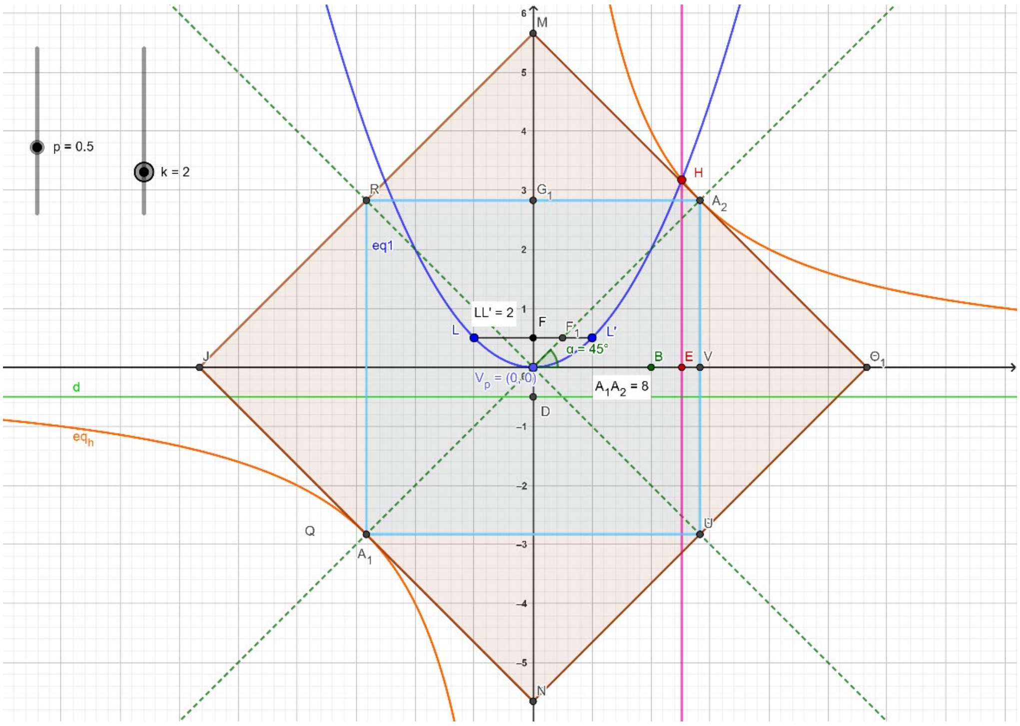

FIGURA 8: Quadrado inscrito no quadrado base da hipérbole equilátera $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$)
FONTE: Oliveira (2023, p. 83)

No GeoGebra, é possível alterar os valores de p e k através de controles deslizantes e, assim, observar dinamicamente as modificações produzidas pelos novos parâmetros.

Utilizando o método da substituição para solucionar o sistema de equações não lineares $x^2 = ky$ ($\mathrm{eq_p}$) e $xy = 2k^2$ ($\mathrm{eq_h}$), obtemos como solução o ponto $H = \left(\sqrt[3]{2}k, \sqrt[3]{4}k\right)$, interseção da parábola com a hipérbole. Baixando uma perpendicular ao eixo Ox passando por H, determinamos o ponto E em Ox. Este ponto tem a mesma abscissa do ponto H. Logo, E= $\left(\sqrt[3]{2}k, 0\right)$ – Figura 9.

Ainda, as distâncias $d(V_p, B)$, onde $B = (k, 0)$, e $d(V_p, E)$ representam, respectivamente, o comprimento $x = k$ da aresta do cubo e o comprimento $x = \sqrt[3]{2}k$ da aresta do cubo de volume duplicado, como ilustra a Figura 9.

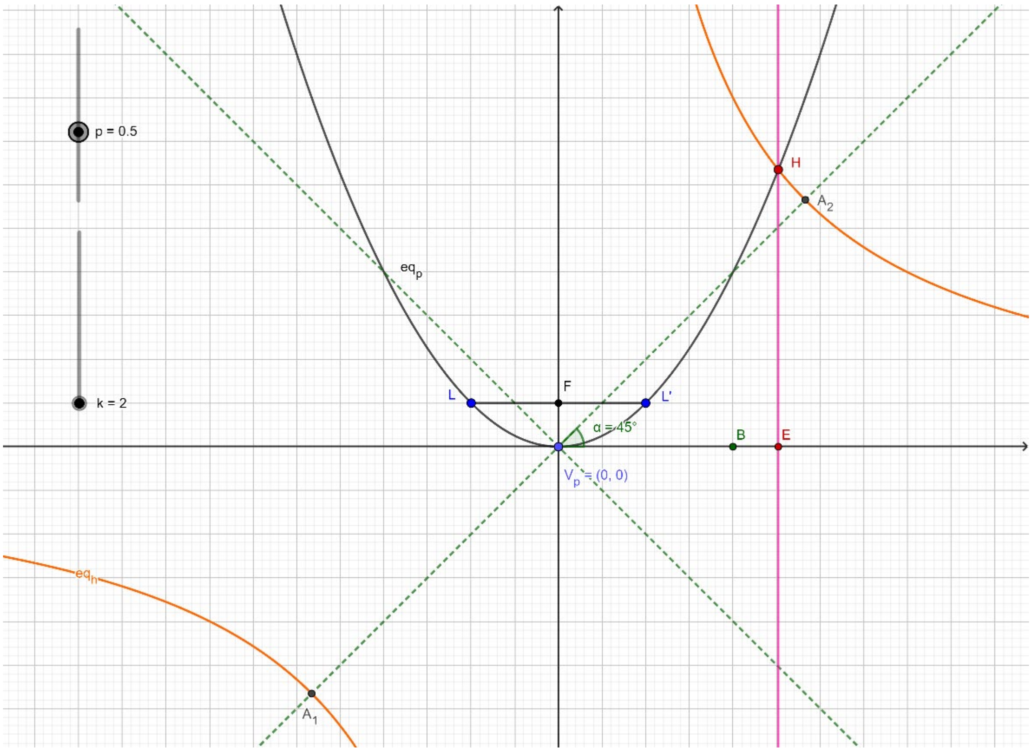

FIGURA 9: Segmentos $\overline{V_pB}$ e $\overline{V_pE}$, de comprimentos k e $\sqrt[3]{2}k$, respectivamente, com $k = 2$
FONTE: Oliveira (2023, p. 84)

Ao manejamos os controles deslizantes, que alteram os valores dos parâmetros k e p, podemos verificar o que ocorre com as medidas dos segmentos $\overline{V_pB}$ e $\overline{V_pE}$, onde $V_p = (0,0)$ é o vértice da parábola. Construímos uma atividade no GeoGebra que permite observar o que ocorre quando se altera o valor de p e/ou k. Esta atividade está disponível em

https://www.geogebra.org/classic/q5vb2qht.

Deste modo, a solução do problema da duplicação do cubo usando as contribuições de Menaecmo consiste em se determinar a interseção entre as parábolas (2) e (3) ou entre uma destas e a hipérbole (4). Em qualquer das escolhas, baixando uma perpendicular ao eixo Ox passando pelo ponto de interseção H, determinamos em Ox o ponto E. Assim, o comprimento do segmento $\overline{V_pE} \equiv \overline{AE}$ é a medida da aresta do cubo duplicado. A Figura 10 ilustra as duas contribuições de Menaecmo à duplicação do cubo.

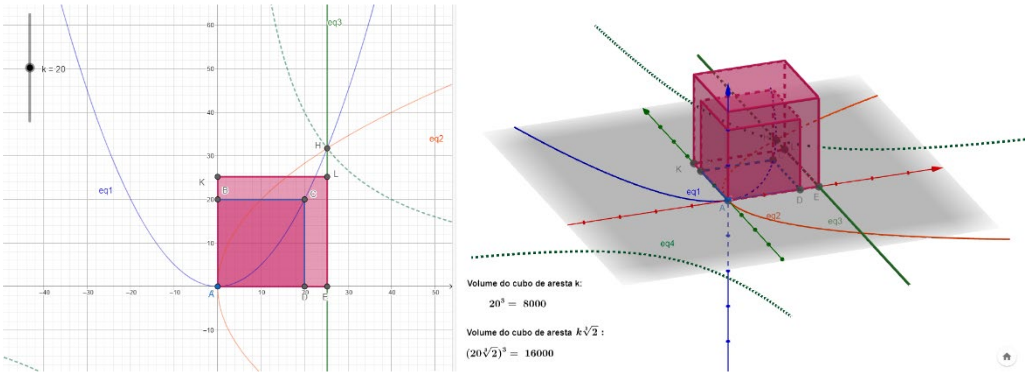

FIGURA 10: Volume dos cubos de arestas k e $\sqrt[3]{2}k$, com $k = 20$
FONTE: Oliveira (2023, p. 85)

Organizamos no GeoGebra uma atividade para determinar o volume do cubo original e do cubo duplicado a partir do valor do parâmetro k, que pode ser modificado pelo controle deslizante. Disponibilizamos a atividade em

https://www.geogebra.org/classic/htadhqhx.

Considerações finais

Descrevemos neste trabalho as duas estratégias propostas pelo matemático grego Menaecmo, derivadas da proporção de Hipócrates de Quio, para duplicar o volume do cubo. Construímos no GeoGebra 2D e 3D atividades dinâmicas, acessadas por links externos, que investigam as duas estratégias de Menaecmo, estas baseadas nas propriedades de duas seções cônicas: a parábola e a hipérbole.

A organização de atividades dinâmicas para a sala de aula com o GeoGebra está em consonância com o que estabelecem a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), o Currículo da Rede Estadual Paranaense – CREP (Paraná, 2021a) e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (Paraná, 2021b) acerca do emprego de tecnologias digitais no ensino de matemática na Educação Básica. Apesar das atividades dinâmicas apresentadas neste trabalho terem sido propostas para o Ensino Superior, as mesmas podem ser adaptadas para o Ensino Médio. Contudo, constata-se que o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná não abrange o estudo de seções cônicas na Unidade Temática 03 – Geometrias.

Almejamos que este trabalho inspire professores(as) de matemática da Educação Básica e do Ensino Superior a utilizar a duplicação do cubo como tema motivador no estudo de conteúdos matemáticos, particularmente das seções cônicas, promovendo a interdisciplinaridade ao abordar tópicos da História da Matemática.

Referências

ALEX, K. M.; MUTEMBEI, J. The cube duplication solution (a compass-straightedge (ruler) construction). **International Journal of Mathematics Trends and Technology**, v. 50, n. 5, p. 307-315, 2017. Disponível em: https://ijmttjournal.org/public/assets/volume-50/number-5/IJMTT-V50P549.pdf. Acesso em: 17 jun. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 jun. 2024.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. 4a. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. Toronto: John Wiley & Sons, 1969.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. Coleção PROFMAT. 2a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DOMINGUES, H. H. Seções cônicas: história e ensino. **Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 4, p. 43-49, 1998.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5a. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

GEOGEBRA. **Baixar aplicativos GeoGebra**. [S.l.]: GeoGebra, 2024a. Disponível em: https://www.geogebra.org/download?lang=pt. Acesso em: 17 jun. 2024.

GEOGEBRA. **Materiais didáticos**. [S.l.]: GeoGebra, 2024b. Disponível em: https://www.geogebra.org/materials?lang=pt. Acesso em: 17 jun. 2024.

KLEIN, F. **Famous problems of elementary geometry**. Boston: Ginn and Co., 1897.

LAGO, R. C.; NÓS, R. L. Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 15-29, 2020.

NÓS, R. L.; SANO, M.; SILVA, V. M. R. da. A dynamic view of some geometric loci via GeoGebra. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 1-21, 2024.

OLIVEIRA, K. S. de. **Investigando problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GeoGebra e o GNU Octave**. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

OLIVEIRA, K. S. de; NÓS, R. L.; SAITO, O. H. **Propostas de atividades para solucionar problemas aritméticos, algébricos e geométricos com o GNU Octave e o GeoGebra**. EduCapes, 2023. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/741685. Acesso em: 17 jun. 2024.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba: SEED, 2021a. Disponível em: https://professor.escoladigital.pr.gov.br/crep. Acesso em: 17 jun. 2024.

PARANÁ. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED, 2021b. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf. Acesso em: 17 jun. 2024.

ROONEY, A. **A história da matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012.

SAITO, K. Doubling the cube: a new interpretation of its significance for early greek geometry. **Historia Mathematica**, v. 22, p. 119-137, 1995.

SAITO, O. H; NÓS, R. L.; OLIVEIRA, K. S. de. Usando o GeoGebra 3D para duplicar o cubo e reinterpretar imagens. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, 11(1), 010505-1 – 010505-7, 2025.

SILVA, V. M. R. da; NÓS, R. L.; Sano, M. Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 12, n. 1, p. 62-77, 2023.

WILLIS, L. A. Duplication of a cube. **American Journal of Applied Mathematics**, v. 3, n. 6, p. 256-258, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/293011869_Duplication_of_a_Cube. Acesso em: 17 jun. 2024.

Enviado: 24/06/2024

Aceito: 21/04/2025