https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p257-266

Uma Técnica Simples de Animação de Morphing no GeoGebra usando Combinações Lineares Convexas

A Simple Morphing Animation Technique in GeoGebra using Convex Linear Combinations

HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI[1]

https://orcid.org/0000-0003-1212-6252

LUCIANA PRADO MOUTA PENA [2]

https://orcid.org/0000-0003-1259-6473

RESUMO

Entre os muitos atributos do GeoGebra, o recurso de gerar animações se destaca. Neste texto apresentamos por meio de alguns exemplos, como o conceito de combinação linear convexa se constitui em uma técnica simples e poderosa de se gerar animações do tipo morphing, onde os objetos se transformam gradualmente de uma configuração para outra. Combinações lineares convexas são uma aplicação prática e visualmente atraente de combinações lineares, destacando-se pela sua versatilidade e elegância matemática, o que as torna úteis em diversas áreas e valiosas para ensinar conceitos abstratos de forma tangível.

Palavras-chave: *Animação; GeoGebra; Combinação Linear Convexa; Morphing.*

ABSTRACT

Among the many features of GeoGebra, the ability to create animations stands out. In this paper, we present, through a few examples, how the concept of convex linear combination serves as a simple and powerful technique for generating morphing animations, where objects gradually transform from one configuration to another. Convex linear combinations are a practical and visually appealing application of linear combinations, notable for their versatility and mathematical elegance, making them useful in various fields and valuable for teaching abstract concepts in a tangible way.

Keywords: *Animation; GeoGebra; Convex Linear Combination; Morphing.*

[1] Universidade Federal Fluminense (UFF), campus Niterói- humbertobortolossi@id.uff.br
[2] Universidade Federal Fluminense (UFF), campus Niterói- lucianapena@id.uff.br

Introdução

Diferentemente das ilustrações estáticas em livros físicos e mesmo desenhos feitos com régua e compasso tradicionais, as construções realizadas em ambientes de Geometria Dinâmica como o GeoGebra permitem manipulação e ajuste contínuo. Uma vez implementadas, seus elementos podem ser deslocados na tela mantendo as relações previamente estabelecidas. Isso permite que alunos e professores, em vez de gastarem tempo com detalhes de construção repetitivos, concentrem-se na compreensão das relações matemáticas existentes entre os objetos. Estes ambientes dinâmicos abrem a oportunidade para animações, aqui entendidas como o movimento dos elementos presentes na tela do aplicativo.

O GeoGebra oferece diversas maneiras de produzir movimentos em suas construções. Estas incluem:

1. A movimentação manual direta dos elementos livres e semilivres[3] com o respectivo ajuste automático dos elementos dependentes.
2. O uso de controles deslizantes para manipular parâmetros de forma "contínua" e precisa.

O uso de animações é cada vez mais comum no ensino e na aprendizagem multimídia. Presume-se que as animações aumentem o interesse e a motivação, direcionem a atenção, ilustrem procedimentos e expliquem como as coisas funcionam. De fato, já existem diversos estudos têm explorado o uso de animações sob uma perspectiva didático-pedagógica: Abu, Hassan e Sahib (2001) e Basniak (2020), no ensino de funções; Ari et al. (2024), no ensino de frações; Altiparmak (2014), no ensino de derivadas; Jancheski (2019), na área de Física; Barbosa (2013), no contexto da resolução de problemas com alunos e professores da OBMEP; e Valdez, Trujillo e Wiburg (2013), no ensino de razão e proporção.

Não obstante, é importante observar que alguns autores apontam que as animações não possuem eficácia intrínseca ou automática. Sua eficácia educacional depende de como as características das animações interagem com o funcionamento cognitivo do aluno, como apontado por diversos estudos na área (Höffler; Leutner, 2007; Lowe; Schnotz, 2008; Tversky; Morrison; Betrancourt, 2002; Amundsen, 2024).

Tversky, Morrison e Betrancourt (2002) colocam dois princípios fundamentais relacionados à eficácia das animações:

1. **Princípio da Congruência**: Sugere que a estrutura e o conteúdo da representação externa (como gráficos ou animações) devem corresponder à estrutura e ao conteúdo da representação interna desejada (como o modelo mental do aprendiz). Animações

[3] O termo semilivre usado aqui se refere a um elemento que pode ser movido, mas não em qualquer direção, pois sua posição fica restrita a um outro elemento. Por exemplo, um ponto criado sobre uma reta é semilivre, Apesar de poder ser deslocado, o ponto sempre ficará sobre a reta.

devem ser eficazes quando há uma correspondência natural entre o que é exibido (mudança ao longo do tempo) e o conceito que se quer ensinar (como processos ou transformações).

2. **Princípio da Apreensão**: Afirma que a estrutura e o conteúdo da representação externa devem ser percebidos e compreendidos de forma clara e precisa. Muitas animações falham nesse aspecto porque podem ser complexas demais ou rápidas demais para serem compreendidas corretamente. Além disso, alguns processos contínuos são mais bem entendidos quando divididos em etapas discretas, o que pode ser difícil de realizar com animações.

Amundsen (2024), por sua vez, em sua dissertação, destaca diversos aspectos sobre a eficácia e os desafios no uso de animações na educação em informática, com base na percepção de educadores e na aplicação dessas tecnologias:

1. **Percepções dos Educadores:** Há um espectro de atitudes entre os educadores em relação ao uso de animações. Embora muitos reconheçam o potencial das animações para aumentar o engajamento e facilitar a compreensão de conceitos complexos, outros expressaram preocupações sobre a possibilidade de essas animações promoverem uma compreensão superficial se não forem integradas de maneira cuidadosa.
2. **Desafios na Integração:** Existem várias barreiras à integração eficaz de animações no ensino, como restrições de recursos, dificuldades técnicas e questões de direitos autorais. Apesar disso, os educadores também reconhecem que as animações oferecem oportunidades únicas para experiências de aprendizado interativo que podem melhorar a compreensão.
3. **Temas Adequados para Ensino com Animações:** Certos tópicos complexos são considerados particularmente adequados para o ensino baseado em animações. Isso sugere que a incorporação dessas ferramentas pode ser mais eficaz em áreas abstratas e visuais.
4. **Implicações Teóricas e Práticas:** Existe a necessidade de uma maior exploração sobre como esses princípios são aplicados na prática. O desenvolvimento de recursos compartilhados e treinamento para educadores, bem como a criação de diretrizes claras para o uso de animações.

As recomendações apontam para a necessidade de maior apoio institucional, o desenvolvimento de repositórios colaborativos de animações de alta qualidade, e a criação de políticas e infraestrutura técnica adequadas para facilitar o uso dessas ferramentas no ensino.

Neste contexto apresentamos como combinações lineares convexas (também conhecidas como combinações afins) fornecem um método de se gerar animações do tipo *morphing* (onde os objetos se transformam gradualmente de uma configuração para outra).

1. Combinações lineares convexas e animações

Dados v_1 e v_2 elementos de um espaço vetorial e s_1 e s_2 escalares não negativos com $s_1 + s_2 = 1$, a combinação linear convexa associada é definida por:

$$\sum_{i=1}^{2} s_i v_i = s_1 v_1 + s_2 v_2 = (1-t)v_1 + t v_2.$$

Observe que podemos interpretar a combinação linear convexa $(1-t)v_1 + tv_2$ como uma média aritmética ponderada de v_1 e v_2 com pesos $(1-t)$ e t, respectivamente.

No presente artigo, exploramos combinações lineares convexas de dois elementos e a técnica será introduzida por meio de um exemplo elementar[4] : a partir de uma nova construção no GeoGebra

1. Crie dois pontos de nomes V_1 e V_2.
2. Crie um controle deslizante de nome t (para evocar a noção de tempo), de valor mínimo 0 (zero), valor máximo 1 (um) e incremento 0.01. É importante, como veremos, que os valores máximo e mínimo sejam os indicados. Quanto menor o valor do incremento, mais suave será a animação.
3. Por fim, no campo de Entrada, digite a expressão C= $(1-t)\cdot V_1 \; + t \cdot V_2$e, então pressione a tecla ENTER. Um ponto C será criado. Observe que:
   a. Quando o controle deslizante tem valor 0, o ponto C coincide com o ponto V_1.
   b. Quando o controle deslizante tem valor 1, o ponto C coincide com o ponto V_2.
   c. Para valores de t entre 0 e 1 $(0 < t < 1)$, o ponto C gradualmente percorre o segmento de reta de extremidades V_1 e V_2. Dica: Habilite o rastro do ponto C para visualizar as diversas posições intermediárias que o ponto ocupa ao longo do segmento V_1V_2. Alternativamente, você pode construir o lugar geométrico do ponto C com relação ao parâmetro t para construir sua trajetória como um objeto permanente.

Vamos a mais um exemplo, agora no contexto de funções reais[5] (Figura 1):

1. A partir de uma nova construção, usando o Campo de Entrada, defina duas funções: $v_1 = x\text{^}2$ e $v_2 = sen(9x)$.
2. Como antes, crie um controle deslizante de nome t (para evocar a noção de tempo), de valor mínimo 0 (zero), valor máximo 1 (um) e incremento 0.01.
3. Por fim, no Campo de Entrada, digite a expressão $h = (1-t) * v\_1 + t * v\_2$ e, então, pressione a tecla ENTER. Uma função h será criada. Observe que:
   a. Quando o controle deslizante tem valor 0, a função h coincide com a função v_1.

[4] Para um melhor entendimento do processo, o leitor interessado pode acessar a construção proposta xcom seu respectivo protocolo de construção por meio do link: < https://www.GeoGebra.org/m/hxgrpbke>.
[5] A técnica também funciona em 3D para gráficos de funções de duas variáveis.

b. Quando o controle deslizante tem valor 1, a função h coincide com a função v_2.
c. Para valores de t entre 0 e 1 ($0 < t < 1$), o gráfico da função h se transforma gradualmente do gráfico da função v_1 no gráfico da função v_2.

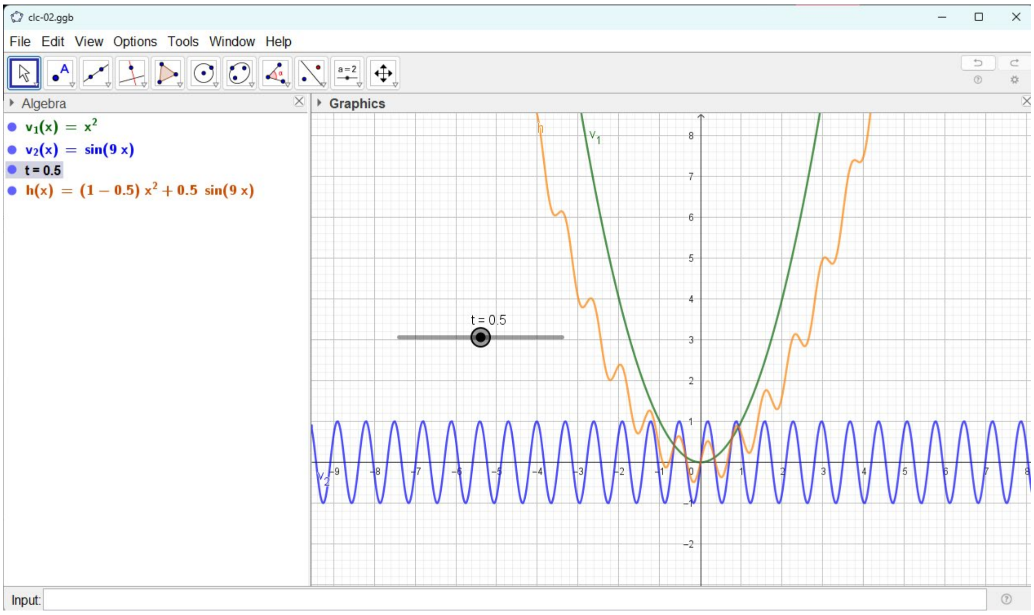

Figura 1 - Combinação linear convexa de duas funções reais
Fonte: Os autores[6], 2024.

Vamos agora a um exemplo um pouco mais sofisticado que gera uma animação de *morphing* entre um quadrado e um círculo (Figura 2).

1. A partir de uma nova construção, crie um círculo c e, em seguida, usando a Ferramenta Polígono Regular crie um quadrado de vértices C, D, E e F.
2. Crie dois controles deslizantes, um de nome t e outro de nome s, ambos de valor mínimo 0 (zero), valor máximo 1 (um) e incremento 0.01.
3. Crie um caminho poligonal de nome j a partir dos vértices C, D, E e F do quadrado criado no Passo 1. Para isso, no Campo de Entrada, digite:

   j = CaminhoPoligonal({C, D, E, F, C})

   e, então pressione a tecla ENTER (note que o caminho poligonal começa e termina no ponto C).
4. Crie um ponto V_1 com relação ao parâmetro s no círculo c. Para isto, digite no Campo de Entrada $V_1 = Ponto(c, s)$ e, então pressione a tecla ENTER.
5. Crie um ponto V_2 com relação ao parâmetro **s** no caminho poligonal j. Para isso, digite no campo de Entrada $V_2 = Ponto(j, s)$ e, então. pressione a tecla ENTER. Observação:

[6] Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/m/vpmuyfty>Acesso em 31 mar. 2025.

caso queira, o ponto V_1 pode ser criado sdo diretamente sobre o quadrado do Passo1 e o caminho Poligonal do Passo 3 não precisa ser construído.

6. Se você alterar o valor do controle deslizante s, notará que o ponto V_1 se deslocará sobre o círculo c e o ponto V_2 se deslocará sobre o caminho poligonal j.
7. No Campo de Entrada, digite a expressão $P = (1 - t) * V\_1 + t * V\_2$ e, então, pressione a tecla ENTER. Isto criará o ponto P que é combinação linear convexa dos pontos V_1 e V_2.
8. Por fim, crie o lugar geométrico do ponto P com relação ao controle deslizante. Para isto, digite no Campo de Entrada: LugarGeométrico(P, s) e, então pressione a tecla ENTER (sugerimos que você mude a cor do lugar geométrico criado para evidenciá-lo. Observe que:
   a. Quando o controle deslizante t tem valor 0, o lugar geométrico coincide com o quadrado.
   b. Quando o controle deslizante t tem valor 1, o lugar geométrico coincide com o círculo.
   c. Para valores de t entre 0 e 1 $(0 < t < 1)$, o lugar geométrico se transforma gradualmente do quadrado no círculo.

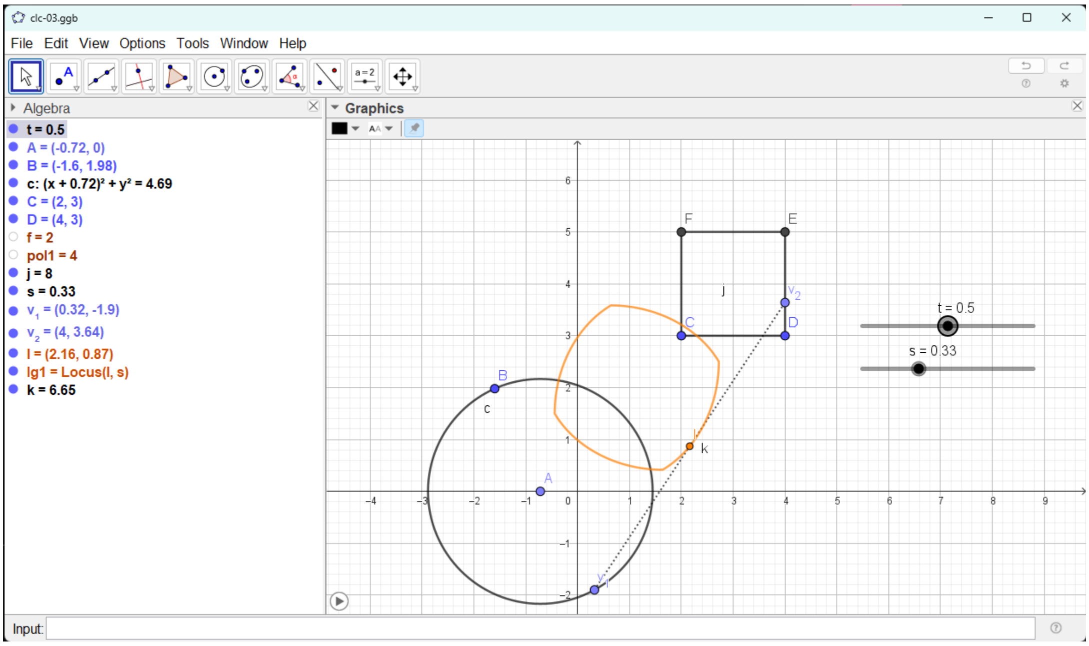

Figura 2 - Combinação linear convexa de um círculo e um quadrado
Fonte: Os autores[7] , 2024.

[7] Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/m/hwzyugka>. Acesso em: 31 mar. 2025.

A construção da Figura 3 apresenta a mesma animação de *morphing* entre um quadrado e um círculo, mas, agora, em 3D (as etapas intermediárias geram uma superfície).

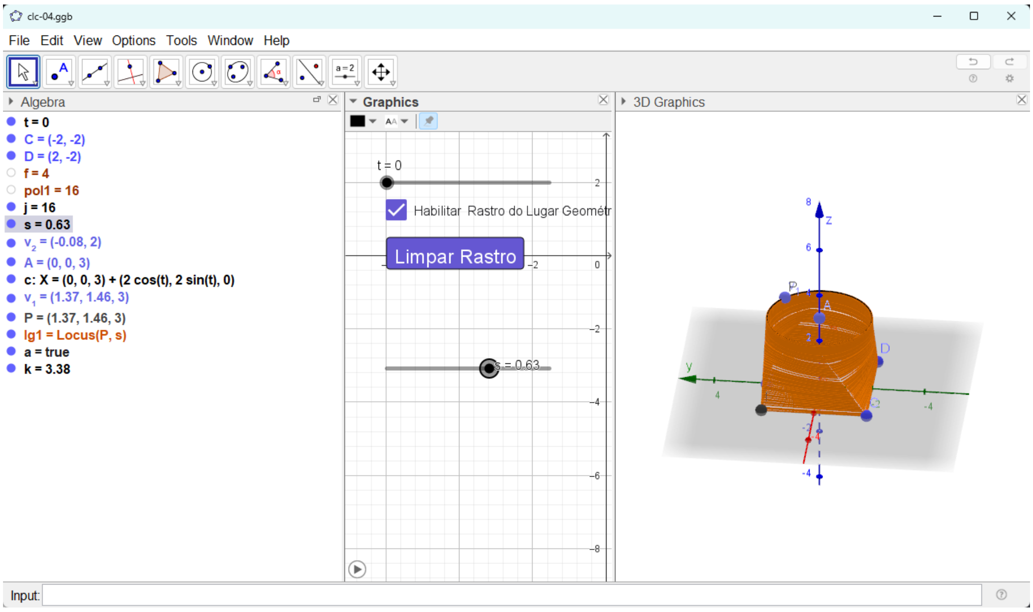

Figura 3 -Combinação linear convexa de um círculo e um quadrado em 3D
Fonte: Os autores.[8], 2024.

Observe que a técnica apresentada aqui pode ser aplicada a quaisquer objetos para os quais estão definidas a soma e a multiplicação por escalar (ou seja, para objetos de um espaço vetorial). De fato, estas são as condições para que a expressão $(1-t)v_1 + tv_2$ tenha sentido e possa ser calculada.

Concluiremos esta seção mostrando como criar uma combinação linear convexa de cores no GeoGebra, tendo em mente que uma cor no sistema RGB é um vetor de três coordenadas as quais especificam a quantidade de vermelho (Red), verde (Green) e Azul (Blue). Estas quantidades, no GeoGebra são números entre 0 e 1.

Na construção indicada na Figura 4, os controles deslizantes R1, G1 e B1 definem a cor do quadrado à esquerda; os controles deslizantes R2, G2 e B2, por sua vez, definem a cor do quadrado à direita; o controle deslizante t define a cor do quadrado central como combinação linear convexa das cores dos outros dois quadrados. Observe que:

a. Quando o controle deslizante t tem valor 0, a cor do quadrado central coincide com a cor do quadrado à esquerda.
b. Quando o controle deslizante t tem valor 1, a cor do quadrado central coincide com a cor do quadrado à direita.

[8] Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/m/w4nfwxub>. Acesso em 31 mar. 2025.

c. Para valores de t entre 0 e 1 ($0 < t < 1$) a cor do quadrado central se transforma gradualmente da cor do quadrado à esquerda na cor do quadrado à direita.

d. Em Computação Gráfica esta técnica pode ser usada para *morphing* de imagens de mesmo tamanho (o *morphing* é aplicado às cores dos pixels individuais das imagens[9]).

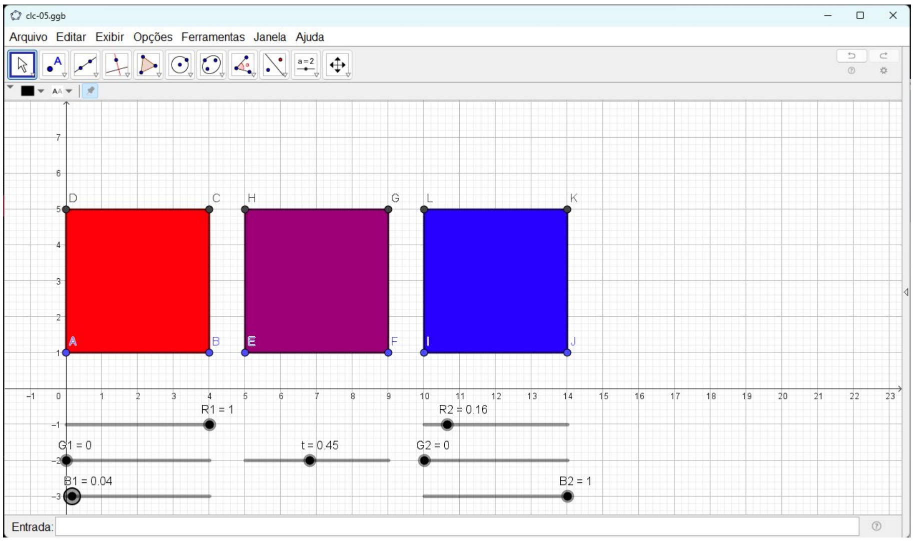

Figura 4 - Combinação linear convexa de duas cores
Fonte: Os autores[10], 2024.

O conceito de combinações lineares convexas pode ser generalizado para n elementos. Dado um subconjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial linear e s_1, s_2, ... e s_n escalares não-negativos onde $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$. Uma combinação linear convexa é definida por:

$$c = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot v_i$$

Esse conceito é amplamente utilizado em diversas áreas, especialmente na otimização, geometria e análise de dados, por sua propriedade de limitar o espaço de soluções a uma região convexa, o que facilita o processo de decisão e análise de variáveis.

Por exemplo, no caso em que os elementos são os três vértices de um triângulo, as combinações lineares convexas estão relacionadas com o conceito de coordenadas baricêntricas, as quais fornecem uma maneira natural de expressar qualquer ponto do triângulo como uma média ponderada dos vértices (por exemplo, o baricentro de um triângulo é a combinação linear convexa de seus vértices com pesos 1/3, 1/3 e 1/3) (Bortolossi; Figueiredo, 2017).

---

[9] No GeoGebra, a cor de cada quadrado é ajustada editando-se suas propriedades. Na aba "Avançado", na área de cores dinâmicas, os nomes dos controles deslizantes são colocados em cada campo de cor.
[10] Disponível em: < https://www.GeoGebra.org/m/qe9npp7q >. Acesso em: 31 mar. 2025.

Podemos citar ainda inúmeras outras aplicações: as combinações lineares são usadas para se definir conjuntos convexos (Bortolossi, 2002) e, em Computação Gráfica elas são usadas para se definir curvas de Bézier, maiores detalhes podem ser encontrados em (Prautzsch; Boehm; Paluszny, 2002) e (Molinari; Retslaff, 2024).

Considerações finais

Combinações lineares convexas são um excelente exemplo da aplicação prática e visualmente atraente de combinações lineares, um tema fundamental nos cursos de Álgebra Linear. Sua versatilidade e elegância matemática as tornam não apenas úteis em diversas áreas, mas também um recurso didático valioso para ilustrar conceitos abstratos de forma tangível e interessante.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos professores Edilson José Curvello Machado, Carlos Tomei e Dirce Uesu Pesco pela leitura e sugestões de correção e melhoria no texto inicial.

Referências

ABU, N. A.; HASSAN, M. D.; SAHIB, S. Mathematical animations: the art of teaching. In: **Frontiers In Education Conference** (FIE), 31., Reno, NV. Anais [...]. Reno: IEEE, p. S1C-10–S1C-15, 2001.

ALTIPARMAK, K. Impact of computer animations in cognitive learning: differentiation. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 45, n. 8, p. 1146-1166, Nov. 2014.

AMUNDSEN, M. L. J. **Is animation in education effective? A look into educators' perspective and Human-Computer Interaction**. 2024. Dissertação (Mestrado em Informática) – University of Oslo, Department of Informatics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Oslo, 2024.

ARI, E. F. et al. The influence of animation media in understanding fractions in mathematics. In: **International Conference on Science, Education and Technology 2024**, Semarang: Universitas Negeri Semarang, Semarang. Anais, p. 21-27, 2024.

BARBOSA, S. M. O software GeoGebra e as possibilidades do trabalho com animação. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 22-32, 2013.

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 43-58, 2020.

BORTOLOSSI, H. J. **Cálculo diferencial a várias variáveis: uma introdução à teoria de otimização**. 618 p., Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2002.

BORTOLOSSI, H. J.; FIGUEIREDO, J. O. de. **Coordenadas baricêntricas: uma introdução com ênfase na geometria moderna do triângulo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017.1/cms/cms-coordenadas-baricentricas.pdf>. Acesso em: 3 set. 2024.

HÖFFLER, T.N.; LEUTNER, D. Instructional animation versus static pictures: A meta-analysis. **Learning and Instruction**, v. 17, n. 6, p. 722-738, 2007.

JANCHESKI, M. GeoGebra animations, simulations and computer games in teaching and learning physics. In: **13th International Technology, Education and Development Conference** (INTED). Proceedings [...]. Valencia: IATED, 2019. p. 7613-7623, 2019.

LOWE, R., SCHNOTZ, W. **Learning with animation: Research implications for design.** Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

MOLINARI, J. R. A.; RETSLAFF, F. M. de S. Curvas de Bézier no software GeoGebra e suas aplicações. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 026–043, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/41161. Acesso em: 27 set. 2024.

PRAUTZSCH, H.; BOEHM, W.; PALUSZNY, M. **Bézier and B-Spline Techniques**. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

TVERSKY, B.; MORRISON, J. B.; BETRANCOURT, M. Animation: can it facilitate? **International Journal of Human-Computer Studies**, v. 57, p. 247-262, 2002. DOI:10.1006/ijhc.1017. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1071581902910177>. Acesso em: 31 mar. 2025.

VALDEZ, A.; TRUJILLO, K.; WIBURG, K. Math Snacks: Using Animations and Games to Fill the Gaps in Mathematics. **Journal of Curriculum and Teaching**, v. 2, n. 2, p. 154-161, 2013.

Enviado: 04/10/2024

Aceito: 01/04/2025