https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p267-276

Explorando o uso da janela CAS do GeoGebra para determinar períodos de dízimas periódicas no ensino de matemática

Exploring the use of GeoGebra's CAS view to determine repeating decimal periods in mathematics education

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA[1]
https://orcid.org/0000-0001-7188-3806

RESUMO

O artigo explora o uso da Janela CAS do GeoGebra para determinar o tamanho do período de uma dízima periódica, um tema relevante para o ensino de matemática que pode ser desenvolvido com o suporte de tecnologias educacionais. No texto são apresentados os conceitos matemáticos envolvidos na determinação do período de números racionais infinitos e periódicos, a saber, o Pequeno Teorema de Fermat para identificar o tamanho do período de números racionais com denominadores primos, em um caso particular. São destacados comandos da Janela CAS do GeoGebra que permitem aos alunos explorarem operações numéricas e simbólicas, e podem incentivar a formulação de conjecturas e a resolução de problemas. Conclui-se que a Janela CAS é uma ferramenta eficaz para a aprendizagem investigativa em matemática, embora apresente limitações em certos contextos.

Palavras-chave: *GeoGebra; Janela CAS; dízimas periódicas; ensino de matemática*

ABSTRACT

The article explores the use of the GeoGebra CAS view to determine the period length of repeating decimals, a relevant topic for mathematics education that can be enhanced through educational technologies. The text presents the mathematical concepts involved in determining the period of infinite, periodic rational numbers, particularly applying Fermat's Little Theorem to identify the period length of rational numbers with prime denominators. Specific commands within the GeoGebra CAS Window are highlighted, enabling students to explore numerical and symbolic operations, which can encourage the formulation of conjectures and problem-solving. The study concludes that the CAS Window is an effective tool for investigative learning in mathematics, though it has limitations in certain contexts.

Keywords: *GeoGebra; CAS view; repeating decimals; mathematics education.*

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – mvalmeida@pucsp.br

Introdução

A Janela CAS do GeoGebra é um recurso que integra características de manipulação simbólica de um sistema algébrico computacional (tradução da siglas *Computer Algebra Systems*). Esses sistema integra recursos números, gráficos e simbólicos. Do ponto de vista numérico e gráfico, os sistemas de computação algébrica podem ser vistos como poderosas calculadoras cientificas, capazes de efetuar cálculos e produzir gráficos com grande precisão e versatilidade.

Em Torres (2013) é descrito que a funcionalidade da vista CAS, a partir da versão 4.2, incluem: a realização de operações numéricas e simbólicas, a simplificação de expressões, a resolução de equações e sistemas, a fatoração de polinômios, e o cálculo diferencial e integral. Com uma interface intuitiva e pela sua capacidade de interagir com outras janelas.

Com relação a pesquisas relacionadas a utilização dessa janela destacamos Bortolossi, Pesco e Rezende (2012) e Gonçalves (2023).

Bortolossi, Pesco e Rezende (2012) destacam diversas formas de utilização da Janela CAS para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática. Entre as principais sugestões dos autores destacamos: Essa janela pode facilitar a resolução simbólica de equações e sistemas de equações lineares, permitindo aos alunos explorar soluções e compreender propriedades; auxilia na manipulação algébrica, promovendo a análise e comparação de diferentes formas de expressões; Permite trabalhar com derivadas, integrais e limites, de forma simbólica, possibilitando o desenvolvimento do pensamento matemático avançado; a ferramenta pode ser usada para conferir cálculos e validar hipóteses formuladas durante atividades exploratórias.

Além disso, Gonçalves (2023) que destaca o potencial pedagógico dessa Janela para o ensino e aprendizagem da matemática, especialmente na resolução de sistemas de equações e demonstrações algébricas. Ele enfatiza a importância de integrar representações geométricas e algébricas, proporcionando uma abordagem visual e simbólica que amplia a compreensão dos conceitos matemáticos. Pelo fato de a Janela CAS permitir a realização de cálculos simbólicos, pode promover o desenvolvimento de elementos do pensamento algébrico. Gonçalves (2023) sugere que o uso de ferramentas dessa Janela pode direcionar esforços para a compreensão de processos algébricos, em vez de focar apenas em técnicas operacionais. Além disso, demonstra como a ferramenta pode ser explorada para demonstrações e provas matemáticas, articulando álgebra e geometria analítica.

Destacamos especialmente os recursos simbólicos disponíveis nesse tipo de *software*, pois com eles é possível operar com expressões simbólicas e numéricas exatas que representam objetos matemáticos. Por exemplo, quando efetuamos o consideramos a expressões numérica $2\sqrt{48} + \sqrt[4]{144}$, em uma calculadora, a resposta fornecida será uma aproximação decimal do resultado, como por exemplo, 17,32050580757 (com onze casas decimais). Contudo, com a Janela CAS do GeoGebra é possível operar simbolicamente a expressão e obter a resposta $10\sqrt{3}$, como pode ser observado na Figura 1.

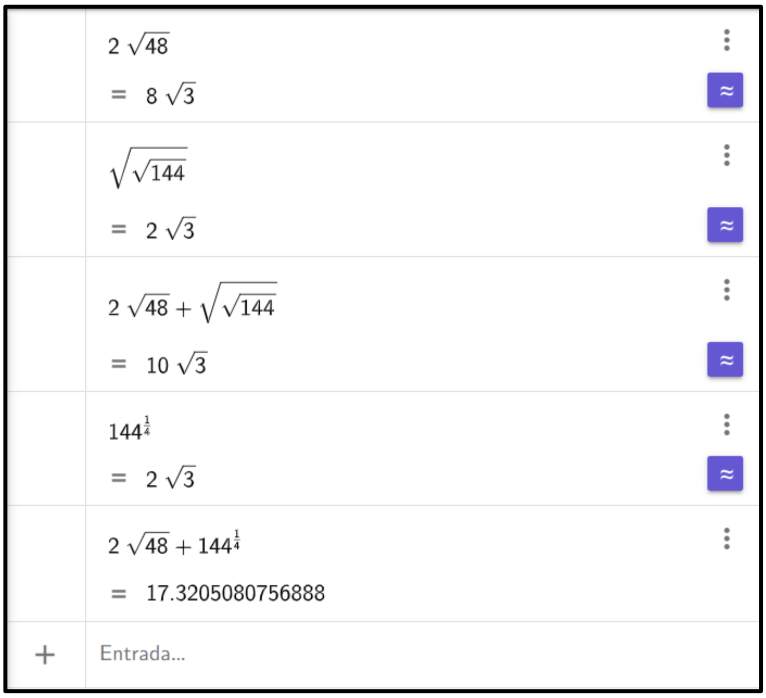

FIGURA 1: A obtenção da resposta a expressão $2\sqrt{48} + \sqrt[4]{144}$ na Janela CAS, GeoGebra 6.0.
FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Com a Janela CAS do GeoGebra pode-se além disso, operar com expressões algébricas simbólicas, como simplificar expressões algébricas, como visto na Figura 2, como o comando Simplificar(<Função>).

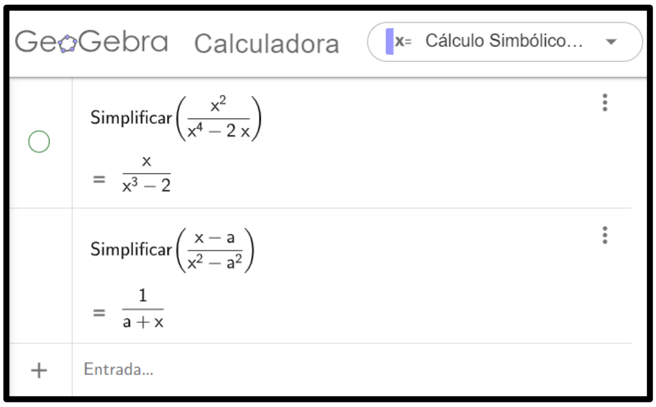

FIGURA 2: Exemplo de utilização do comando simplificar Janela CAS do GeoGebra 6.0.
FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Além disso, cálculos simbólicos não acumulam erros quando é necessária a utilização de uma aproximação de um número, por truncamentos. Contudo, como toda ferramenta computacional, a Janela CAS apresenta limitações. Por exemplo, quando apresentamos os números irracionais para os estudantes do 9° ano dos anos finais do Ensino Fundamental. A forma como identificamos números irracionais é por meio da representação decimal dele que pode ser caracterizada como infinita e não periódica. Contudo, por limitações do sistema CAS, o estudante pode chegar a uma conclusão errônea, quando considera apenas a representação decimal de um número racional.

Por exemplo, observando um certo número no visor do aplicativo Calculadora, disponível no Windows, conforme apresentado na Figura 3, não podemos afirmar se o número é irracional ou não. Pois, se ele for um número racional não é possível determinar o tamanho do período com a quantidade de casas decimais que é oferecida pelo aplicativo. Assim, precisamos de conceitos da matemática para determinar a quantidade de dígitos.

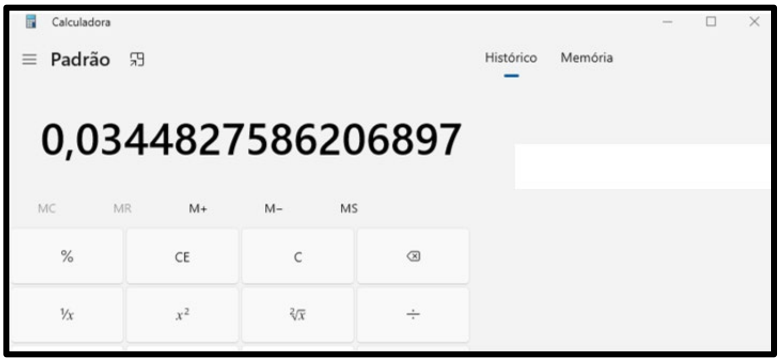

FIGURA 3: Esse número é racional ou irracional?
FONTE: Produção nossa.

Dessa forma é importante conhecer de qual forma é possível conhecer o tamanho do período de uma dízima periódica, mesmo que não seja possível verificá-lo apenas com a observação da representação decimal em uma calculadora. Isso que será discutido neste artigo, como conhecer o tamanho do período de uma dizima periódica quando o seu denominador é um número primo diferente de 2 e de 5.

Este texto está dividido da seguinte forma: apresentamos os conceitos matemáticos que podem ser considerados na determinação da quantidade de casas decimais de um número racional que possui representação decimal finita e não periódica; apresentamos como isso pode ser feito utilizando comando da Janela CAS do GeoGebra. Finalizamos o texto, com reflexões sobre possibilidades de utilização dessa janela no ensino de Matemática.

1. Conceitos matemáticos utilizados para a obtenção do tamanho do período de uma dízima periódica

Nesta seção apresentaremos conceitos matemáticos que podem auxiliar com a resposta a seguinte questão: como determinar o tamanho do período da representação decimal infinita e periódica de um número racional?

Para isso, considere a fração própria a/b sendo que $mdc(a, b) = 1$, sendo que o denominador $b \neq 2^m \cdot 5^n$, para certos $m, n \in \mathbb{N}$. Essa hipótese sobre o denominador é devida a J. H. Lambert (1753) (Sampaio, 2024), e caso b fosse da forma indicada teríamos que o número racional possuiria uma representação decimal finita.

Para esse trabalho, vamos considerar o caso em que o denominador é igual a um número primo, diferente de 2 e de 5. Assim consideremos que a/b é uma fração própria tal que $mdc(a, b) = 1$. Seja $0, a_1 a_2 \dots a_p$ a representação decimal de a/b com período igual a p. Logo, considere que:

$$\frac{a}{b} = 0, a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_p \dots$$

Multiplicando a/b por 10^p:

$$10^p \frac{a}{b} = a_1 a_2 \dots a_p, a_1 a_2 \dots a_p \dots$$

Subtraindo a/b de $10^p a/b$:

$$10^p \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = a_1 a_2 \dots a_p, a_1 a_2 \dots a_p \dots - 0, a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_p \dots$$
$$(10^p - 1) \cdot \frac{a}{b} = a_1 a_2 \dots a_p \in \mathbb{Z}$$
$$(10^p - 1) \cdot a = b \cdot a_1 a_2 \dots a_p \in \mathbb{Z}$$

Pelo fato de $mdc(a, b) = 1$, temos que $b \mid 10^p - 1$ que pode ser representado por $10^p \equiv 1(\text{mod } b)$. Essa relação de congruência pode ser resolvida, quando b for primo diferente de 2 e de 5, por um corolário do Pequeno Teorema de Fermat (PTF), que segundo Hefez (2014), pode ser enunciado da seguinte forma: “Se p é um primo e se a é um número natural não é divisível por p, então p divide $a^p - 1$” (p. 136). Dessa forma como o $mdc(10, b) = 1$, sendo b um primo diferente de 2 e de 5, temos que $10^{b-1} \equiv 1(\text{mod } b)$. Logo, um possível valor para o período de uma dizima periódica seria b – 1.

Contudo, o teorema só garante a existência de um valor que pode ser o período de uma dizima periódica, mas não a minimalidade. Será que existe um expoente menor que esse que satisfaz essa relação do PTF?

Para isso, vamos aplicar o teorema para o caso em que p = 11, temos que $10^{10} \equiv 1(\text{mod } 11)$. Contudo, temos que esse não é o menor valor k, tal que $10^k \equiv 1(\text{mod } 11)$. Note que, com auxílio da Janela CAS podemos verificar que para os valores 2, 4, 6, 8 e 10, temos que o resto da divisão dessa potência de 10^2 por 11 é igual a 1. Para isso é possível utilizar o comando Resto(<Número Dividendo>, <Número Divisor>), apresentando esses resultados na Figura 4.

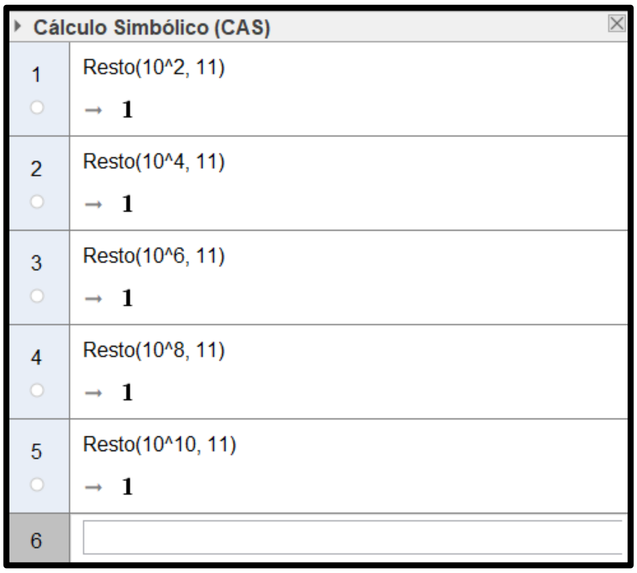

FIGURA 4: Utilizando o comando resto para a divisão de 10^2,10^4,10^6,10^8 e 10^{10} por 11.

FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Note que o PTF não indica que o valor enunciado no teorema é o menor que satisfaz a propriedade. Se existir um valor menor k tal que $a^k \equiv 1(\text{mod}\, n)$, para $a \in \mathbb{Z}$ e n primo e $mdc(a, n) = 1$, esse valor será chamado de ordem de a módulo n e é denotado por $ord_n a$. No caso de $n = 11$ e $a = 10$, temos que $ord_{11} 10 = 2$. Por esse motivo, qualquer número decimal com denominador igual a 11 possui período igual a 2.

Nesta seção apresentamos os resultados que auxiliar a encontrar o período de uma dízima periódica em que o denominador é um número primo. Na próxima apresentaremos como é possível determinar o tamanho de uma dízima periódica utilizando a Janela CAS do GeoGebra.

2. Determinando o tamanho do período de um número racional infinito e periódico

Na Figura 3 apresentamos a representação decimal do número racional 1/29 cujo período é maior que quantidade de casas decimais oferecida pelo aplicativo Calculadora, do Windows. O GeoGebra também tem essa limitação, pois ele oferece em suas opções de arredondamento até 15 casas decimais (Figura 6).

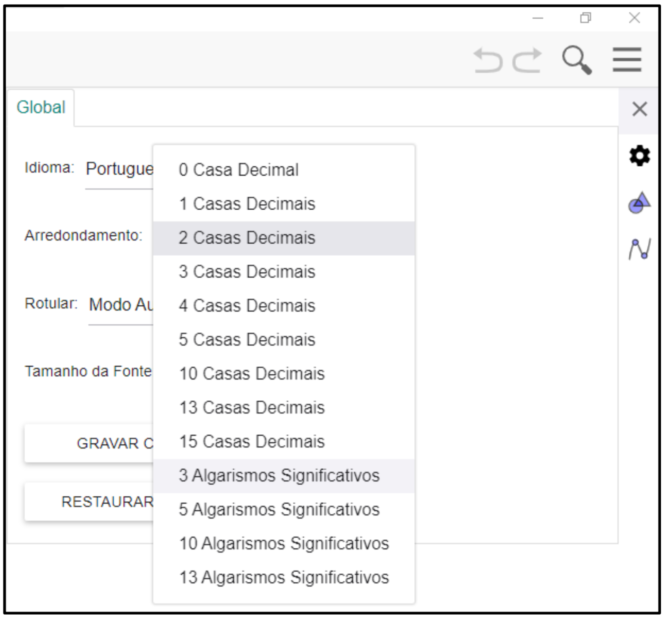

FIGURA 6: Quantidade máxima de casas decimais disponível no GeoGebra.
FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Com essa opção selecionada é possível calcular uma aproximação decimal de uma dízima periódica com no máximo 15 decimais. Como pode ser visto na Figura 7, em que digitamos a representação fracionário do número e depois clicamos na ferramenta "Valor Numérico".

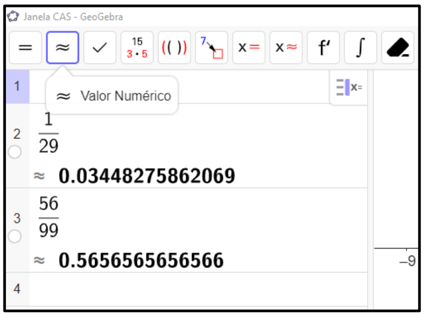

FIGURA 7: Cálculo da representação decimal dos números 1/29 e 56/99
FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Note que apesar ele oferecer 15 casas decimais, devemos tomar cuidado o valor exibido na última casa decimal. Por exemplo, o número 56/99 foi apresentado na Figura 7 porque sabíamos que ele arredondaria a última casa decimal, visto que a ele é a dizima periódica $0,\overline{56}$.

Para fixar as ideias, vamos procurar determinar o tamanho do período da dizima periódica 1/29.

O PTF indica que para encontrar o tamanho do período da dízima periódica, temos que encontrar o valor k (inteiro positivo), tal que $10^k \equiv 1(\text{mod } 29)$, o que é equivalente a $10^k - 1 \equiv 0(\text{mod } 29)$. Logo, estamos procurando um valor de k tal que $10^k - 1$ seja divisível por 29.

Para fazer essa investigação, podemos aplicação no GeoGebra, que verificar qual é o resto da divisão de 10^k – 1 por 29. Para isso, podemos criar um controle deslizante k, um número inteiro com intervalo entre 1 e 100. Assim, na primeira célula digitamos 10^k – 1; na segunda célula digitamos Resto ($1, 29). A utilização do $ é para coletar o resultado que está na célula número 1. Como pode ser visto na Figura 8.

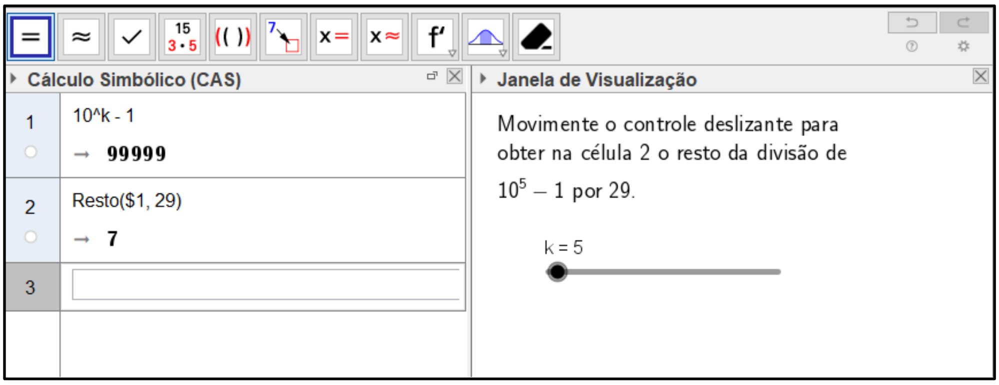

FIGURA 8: Aplicação para o cálculo do resto da divisão de 10^k – 1 por 29.
FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Ao movimente o controle deslizante k, temos que apenas quando ele assume o valor 28 temos que o resto da divisão de 10^{28} – 1 por 29 é igual a 0. Logo, dizemos que 10 é uma raiz primitiva de 29, pois $ord_{29}10 = 28\ (29 - 1)$.

Dessa forma, podemos concluir que o tamanho do período de uma fração própria que tem denominador igual a 29 é igual a 28. Assim, podemos investigar essa relação para outros números primos, como pode ser verificado, por exemplo, para o número primo 7, que 10^6 – 1 é divisível por 7. Logo, o tamanho do período de uma número racional com denominador igual a 7 será igual a 6, com pode ser visto na Figura 9.

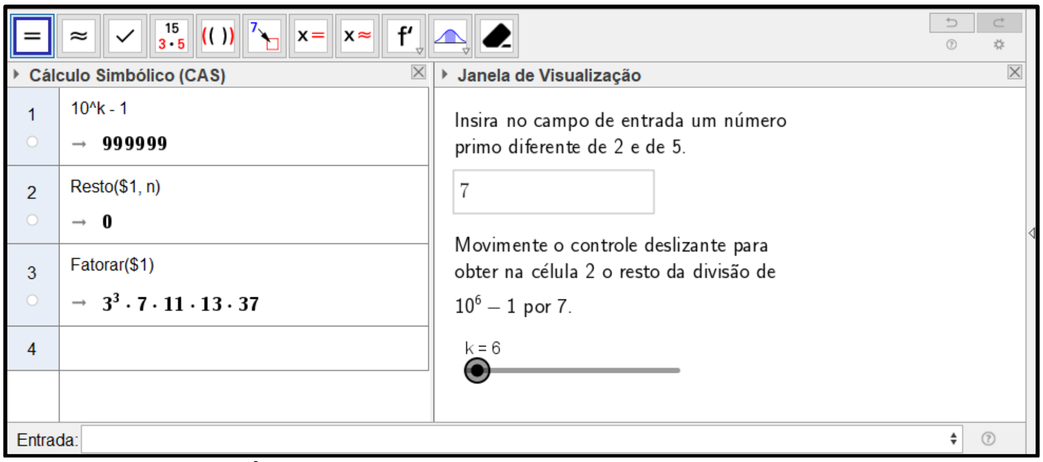

FIGURA 9: Aplicação[2] para o cálculo do resto da divisão de 10^k – 1 por 7.
FONTE: Produção nossa com o GeoGebra.

Entendemos assim como uma possibilidade de incentivar a investigação para a descoberta do tamanho do período de outros números racionais com denominadores iguais a números primos. Além disso, com o Teorema de Euler

[2] Aplicação disponível em: https://www.geogebra.org/m/ec3bfjcp

(Hefez, 2014) podemos realizar um estudo similar para qualquer número composto que é coprimo com o 10.

3. Considerações finais

O uso da Janela CAS do GeoGebra mostrou-se uma ferramenta poderosa para explorar propriedades de números racionais e suas representações decimais, em caso que podem ser ter tamanho de período maior que a calculadora utilizadas pode oferecer. A possibilidade de realizar operações simbólicas e numéricas pode oferecer aos alunos uma experiência de aprendizagem que transcende os métodos tradicionais, permitindo a investigação e compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos.

Durante a atividade apresentada, observou-se que o uso de tecnologias computacionais como o GeoGebra não apenas pode facilitar o aprendizado de tópicos específicos, como dízimas periódicas e Teoria dos números, mas também estimula o pensamento crítico e a formulação de conjecturas matemáticas. Entretanto, é importante ressaltar as limitações das ferramentas CAS, especialmente no que diz respeito ao arredondamento das casas decimais que pode provocar interpretações incorretas, por parte dos estudantes.

Entendemos que seja necessário realizar outras pesquisas e investigações que utilizem a janela CAS do GeoGebra. Para futuras aplicações, sugere-se o desenvolvimento de atividades de investigativas que integrem o uso de sistemas algébricos computacionais no currículo escolar, ajustando a complexidade das tarefas ao nível de escolaridade dos alunos. Espera-se que essa abordagem contribua para uma matemática mais interativa e investigativa, promovendo uma aprendizagem significativa e duradoura.

Referências

Bortolossi, H. J.; Pesco, D. U.; Rezende, W. M. (2012) Computação Simbólica no Ensino Médio com o Software Gratuito GeoGebra. *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra, Uruguay*.

Torres, A. C. A. (2013). Cálculo Simbólico también es posible con GeoGebra . *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 9 (34). Disponível em: https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/796

Gonçalves, W. V. (2023). Amadurecendo como professor, pesquisador e colaborador com o GeoGebra. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, *12*(2), 221–238. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i2p221-238

Hefez, A. (2016) *Arimética*. Rio de Janeiro: SBM.

Sampaio, J. C. V. (2024) *Dízimas periódicas e o teorema de Etiénne Midy*. In. XI BIENAL DE MATEMÁTICA. Disponível em: https://sbm.org.br/xi-bienal/wp-content/uploads/sites/31/2024/07/XI_BM_MINICURSO_Joao_Sampaio.pdf

Enviado: 30/10/2024

Aceito: 23/11/2024