

## Desvendando as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci no GeoGebra

Unraveling the Fibonacci, Lucas and Gibonacci sequences in GeoGebra

PATRÍCIA MASSAE KITANI<sup>1</sup>

<https://orcid.org/0000-0003-1557-6486>

ADRIANO VERDÉRIO<sup>2</sup>

<https://orcid.org/0000-0002-8259-6260>

LUCIANA DA FONSECA CRUZ<sup>3</sup>

<https://orcid.org/0009-0001-6961-7717>

MARI SANO<sup>4</sup>

<https://orcid.org/0000-0003-3822-917X>

### RESUMO

Neste trabalho, são exploradas as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci sob uma perspectiva diferente: com as representações geométricas de algumas identidades relacionadas às sequências por meio do software GeoGebra e a ferramenta controle deslizante, tornando a compreensão dessas identidades mais intuitiva. Além disso, é analisado o paradoxo de Cassini e apresentadas algumas aplicações das sequências de Gibonacci na Geometria Analítica, todos ilustrados com o GeoGebra. A abordagem geométrica permite uma exploração mais ampla e dinâmica, facilitando a identificação de padrões e generalizações.

**Palavras-chave:** Fibonacci; Lucas; Gibonacci; sequência; representação geométrica.

### ABSTRACT

In this work, the Fibonacci, Lucas, and Gibonacci sequences are explored from a different perspective: through geometric representations of some identities related to these sequences using the GeoGebra software and the slider tool, making the understanding of these identities more intuitive. Additionally, Cassini's paradox is analyzed, and some applications of the Gibonacci sequences in Analytical Geometry are presented, all illustrated with GeoGebra. The

<sup>1</sup> Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Magistério Superior na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: [kitani@utfpr.edu.br](mailto:kitani@utfpr.edu.br)

<sup>2</sup> Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professor do Magistério Superior na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: [verderio@utfpr.edu.br](mailto:verderio@utfpr.edu.br)

<sup>3</sup> Mestra em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Professora do Ensino Básico na Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED-PR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: [luciana.fonseca@escola.pr.gov.br](mailto:luciana.fonseca@escola.pr.gov.br)

<sup>4</sup> Doutora em Matemática pela Brandeis University (BRANDEIS). Professora do Magistério Superior na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: [marisano@utfpr.edu.br](mailto:marisano@utfpr.edu.br)



*geometric approach allows for a broader and more dynamic exploration, facilitating the identification of patterns and generalizations.*

**Keywords:** Fibonacci; Lucas; Gibonacci; sequence; geometric representation.

## Introdução

As sequências numéricas sempre fascinaram matemáticos e entusiastas, não apenas por suas propriedades, mas também pela sua presença em fenômenos naturais e em diversas áreas do conhecimento como na arquitetura, arte, biologia, música, economia e, evidentemente, matemática. Em particular, tem-se a sequência de Fibonacci, que segundo Koshy (2017, p. 6), teve essa denominação utilizada pela primeira vez no ano de 1876, quando foi estudada pelo matemático francês *François Édouard Anatole Lucas* (1842-1891). A origem desta sequência remonta a um dos problemas propostos por Leonardo Fibonacci<sup>1</sup> (1175-1250), matemático nascido em Pisa e que teve maior destaque na Idade Média europeia. Em sua famosa obra *Liber Abaci*, escrita em 1202, ele realiza um estudo sobre a aritmética e a álgebra elementar e propõe o problema dos coelhos (Eves, 2004). O problema pode ser encontrado com mais detalhes na versão traduzida do *Liber Abaci* ao inglês moderno por Sigler (2003) e é apresentado a seguir.

Certo homem tem um par de coelhos juntos em um determinado local cercado, e deseja saber quantos serão gerados a partir desse par em um ano, considerando que a natureza deles é gerar outro par a cada mês, e que, no segundo mês, os nascidos também começam a procriar (Sigler, 2003, p. 404, tradução nossa).

Considerando que:

- No primeiro mês tem-se um casal de coelhos;
- No segundo mês permanece-se com um casal de coelhos, pois eles ainda não desenvolveram o suficiente para reproduzirem;
- No terceiro mês os coelhos se reproduzem e dão origem a um novo casal, totalizando dois casais de coelhos;
- No quarto mês o primeiro casal se reproduz novamente e, o segundo casal ainda não está em idade fértil. Dessa forma, tem-se 3 casais de coelhos;
- No quinto mês o primeiro casal se reproduz, o segundo casal se reproduz e o terceiro casal ainda não se reproduz. Totalizando 5 casais;
- Assim, sucessivamente, até chegar a 377 casais ao final de um ano.

Horadam (1961) apresenta uma generalização da sequência de Fibonacci, que foi nomeada sequência de Gibonacci por Benjamin e Quinn (2003, p. 17). A sequência de Gibonacci  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , também é definida por uma relação de recorrência dada por:

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}, \quad G_1 = a \quad \text{e} \quad G_2 = b,$$

onde  $a$  e  $b$  são números inteiros quaisquer. Quando  $a = 1$  e  $b = 1$  obtém-se a sequência de Fibonacci  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e quando  $a = 1$  e  $b = 3$ , chega-se à de Lucas  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (Koshy, 2017, p.10). As sequências de Fibonacci e Gibonacci estão relacionadas pela seguinte identidade  $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ . A

---

<sup>1</sup> “Leonardo, filho de Bonaccio”. Também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano (Eves, 2004, p. 292).



prova dessa identidade pode ser encontrada em (Koshy, 2017, p. 139). Além desta identidade, existem várias outras que relacionam os elementos destas sequências. Por exemplo, uma identidade que relaciona as sequências de Fibonacci e Lucas é dada por  $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (Koshy, 2017, p. 93).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( c \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - d \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

onde  $c = a + (a-b) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$  e  $d = a + (a-b) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ , a demonstração dessa fórmula pode ser consultada em Koshy (2019, p. 130). Para a sequência de Fibonacci (ou seja,  $a = 1$  e  $b = 1$ ) obtém-se a clássica fórmula de Binet.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) enfatiza a importância do desenvolvimento da habilidade de utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades em sequências numéricas. Nesse contexto, as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci surgem como um objeto de estudo particularmente interessante, tanto pela sua beleza matemática quanto por suas inúmeras aplicações.

Koshy (2017, p. 6, tradução nossa) afirma que “a sequência de Fibonacci é uma das mais intrigantes sequências numéricas” e continua a desafiar matemáticos a explorar suas propriedades e a formular novas conjecturas. Nesse sentido, ao longo deste trabalho, são abordados os aspectos algébricos e geométricos de diversas identidades associadas às sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci que foram estudadas pelo autor em seu livro *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (Koshy, 2017).

A parte geométrica, desenvolvida com o auxílio do software GeoGebra, proporciona uma compreensão mais intuitiva das identidades. A ferramenta controle deslizante é utilizada para verificar que as propriedades se mantêm, independentemente do número selecionado. Todos os pontos, que estão em função dos números das sequências, ou de Fibonacci, ou de Lucas, ou de Gibonacci, foram construídos digitando na caixa de entrada a fórmula de Binet (ou análogas a ela no caso de Lucas e Gibonacci) em conjunto com o controle deslizante nas coordenadas. Os links para cada ilustração são disponibilizados para que o leitor possa explorá-los e interagir. Por fim, algumas aplicações da sequência de Gibonacci na Geometria Analítica são apresentadas, também utilizando o GeoGebra para ilustrá-las.

## 1. Algumas identidades envolvendo as sequências de Fibonacci e Lucas

Esta seção mostra uma abordagem visual e interativa de algumas identidades envolvendo as sequências de Fibonacci e Lucas. O diferencial neste trabalho é que as representações geométricas das identidades foram elaboradas no software GeoGebra. Cada qual possuindo um controle deslizante e link específico, onde o leitor pode identificar as alterações, semelhanças e diferenças, de acordo com a variação do valor de  $n$ . A seguir, uma série de identidades envolvendo estas duas sequências, que podem ser encontradas em Koshy (2017), são explicitadas.

**Identidade 1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , têm-se  $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$ .

*Demonstração.* Usando a recorrência dos números de Fibonacci segue que

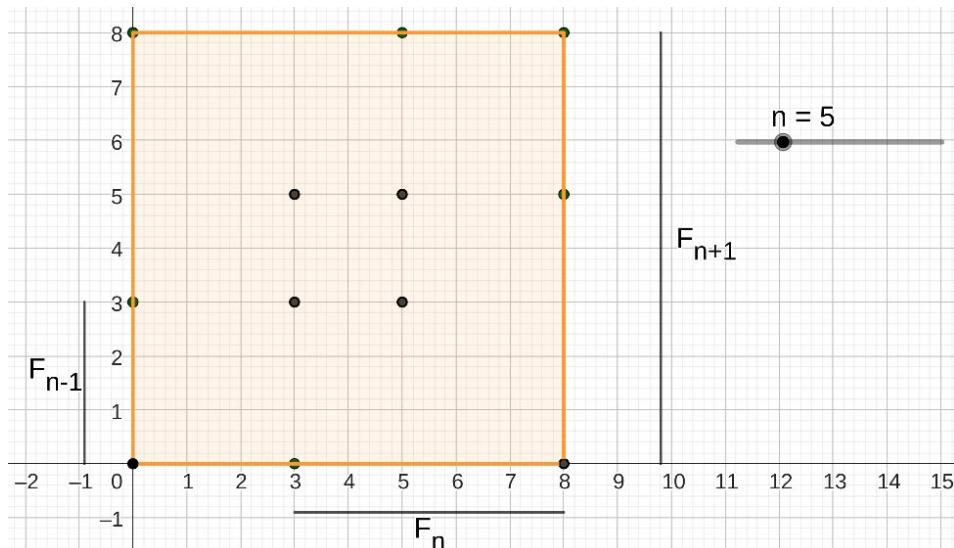


$$2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - (F_n - F_{n-1})^2 = (F_n + F_{n-1})^2 = F_{n+1}^2,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Para facilitar o entendimento visual da identidade  $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$ , inicialmente é representado um quadrado de lado  $F_{n+1}$ , conforme ilustra a Figura 1.

**FIGURA 1:** Representação do quadrado de lado  $F_{n+1}$ , para  $n = 5$ .



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

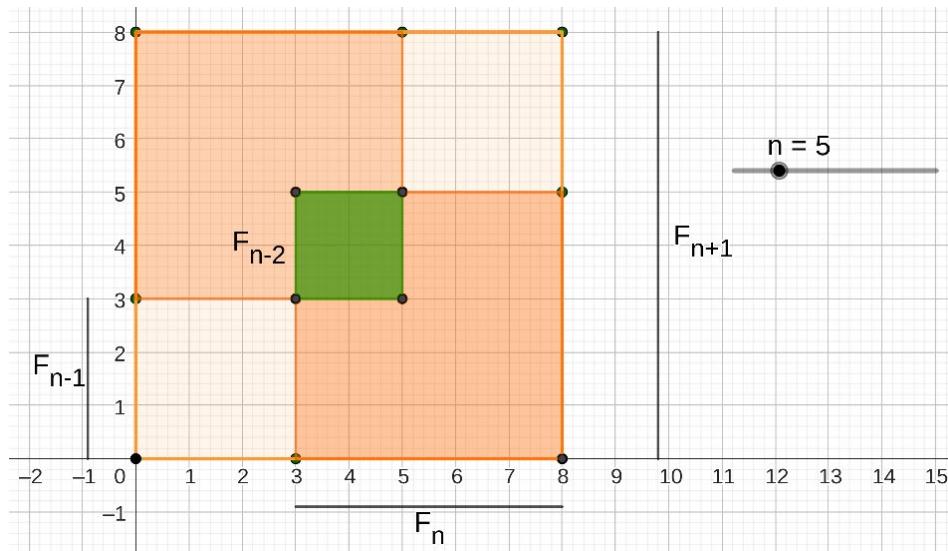
Em seguida, são marcados dois quadrados de lado  $F_n$  em dois vértices em diagonal e internos ao quadrado de lado  $F_{n+1}$ . O que faz com que nos vértices restantes fiquem representados por dois quadrados de lado  $F_{n-1}$  e, na parte central um quadrado de lado  $F_{n-2}$ , conforme a Figura 2. Este quadrado de lado  $F_{n-2}$  apresenta uma sobreposição dada pela interseção dos quadrados de lado  $F_n$ . Ao efetuar a soma das áreas dos quadrados e a subtração da área sobreposta, obtém-se que

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2.$$

A construção geométrica está disponibilizada no link:

<https://www.geogebra.org/m/cbxw6npb.>

**FIGURA 2:** Representação geométrica da Identidade 1



FONTE: Acervo da Pesquisa

**Identidade 2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$ .

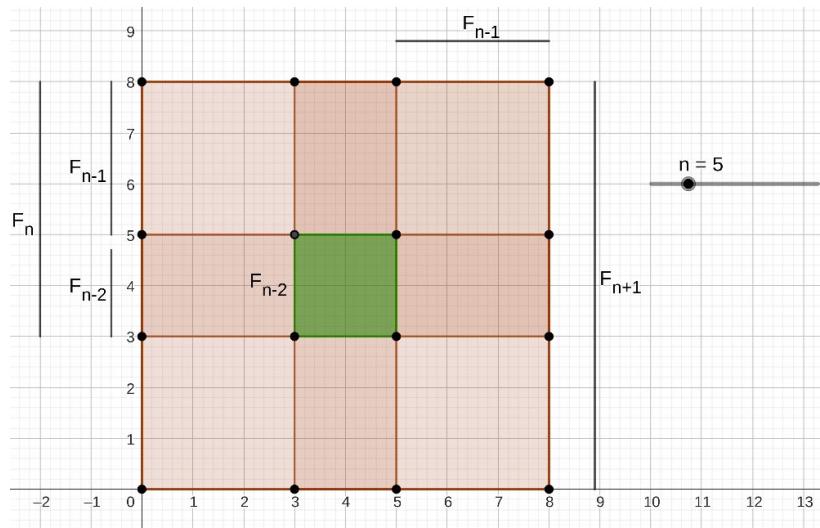
*Demonstração.* Utilizando, novamente, a recorrência dos números de Fibonacci, obtém-se que

$$\begin{aligned} 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2 &= 4F_n^2 - 4F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) - 3(F_n - F_{n-1})^2 \\ &= (F_n + F_{n-1})^2 = F_{n+1}^2, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

A representação da Identidade 2 é efetuada desenhando, primeiramente, um quadrado de lado  $F_{n+1}$ . Logo, são marcados quatro quadrados de lado  $F_n$  em cada um dos vértices do quadrado inicial. Constatava-se, então a existência de quatro retângulos de área  $F_{n-2}F_{n-1}$  os quais apresentam-se em sobreposição pelos quadrados de lado  $F_n$ . Tem-se também, na parte central um quadrado de lado  $F_{n-2}$ , o qual é sobreposto três vezes pelos quadrados de lado  $F_n$ , conforme ilustra a Figura 3.

**FIGURA 3:** Representação geométrica da Identidade 2



FONTE: Acervo da Pesquisa

Dessa forma, a área do quadrado de lado  $F_{n+1}$  é igual a soma das quatro quadrados de lado  $F_n$ , subtraído as áreas referentes aos quatro retângulos de lados  $F_{n-1}$  e  $F_{n-2}$  e aos 3 quadrados de lado  $F_{n-2}$  que estão localizados centralmente. Ou seja,

$$F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2.$$

A construção geométrica está disponível no link:

<https://www.geogebra.org/m/pub6c4gt>

Utilizando o controle deslizante na construção, observa-se que para  $n = 3$  o quadrado inicial é subdividido em nove outros quadrados congruentes entre si.

**Identidade 3.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$ .

*Demonstração.* Como  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  e  $L_{n-2} = F_{n-3} + F_{n-1} = 2F_{n-1} - F_{n-2}$ , segue que

$$\begin{aligned} 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2 &= 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - (2F_{n-1} - F_{n-2})^2 \\ &= 4F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} \\ 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2 &= 4F_{n-1}^2 + (F_n - F_{n-1})^2 + 4F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) \\ &= F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 = F_{n+1}^2, \end{aligned}$$

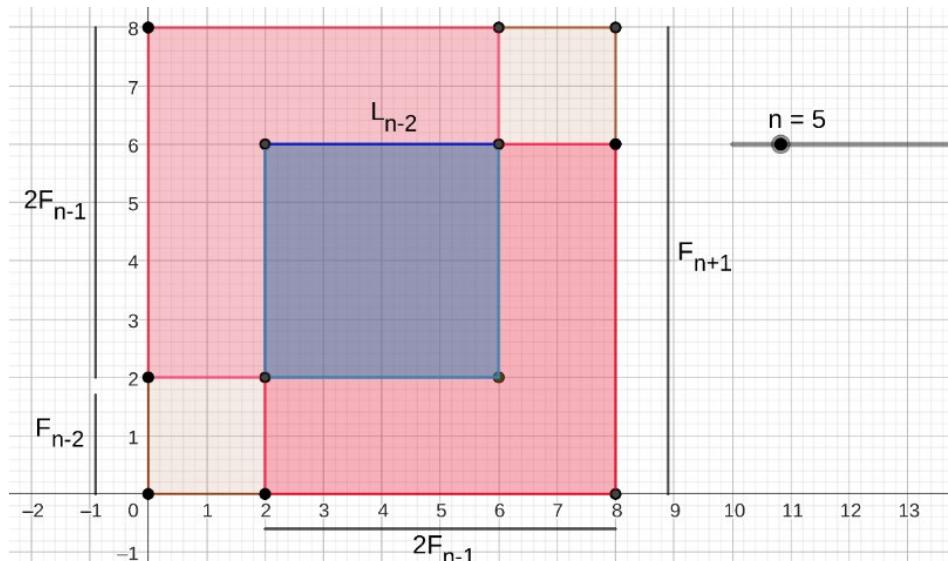
para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Para a identidade  $F_{n+1}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2$  ser representada visualmente, é desenhado em um primeiro momento, um quadrado de lado  $F_{n+1}$ . Como,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-1} = 2F_{n-1} + F_{n-2},$$

dois quadrados de lado  $2F_{n-1}$  são colocados em dois vértices opostos em diagonal. Nos vértices restantes, dois quadrados de lado  $F_{n-2}$  estarão representados e, centralmente um quadrado sobreposto na interseção dos quadrados de lado  $2F_{n-1}$ . Na Figura 4, tem-se uma representação geométrica da identidade desejada.

**FIGURA 4:** Representação geométrica da Identidade 3



**FONTE:** Acervo da Pesquisa



O quadrado localizado centralmente tem lado medindo  $2F_{n-1} - F_{n-2} = L_{n-2}$ . Sendo assim, a área do quadrado de lado  $F_{n+1}$  é dada por:

$$F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2 = 8F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - L_{n-2}^2.$$

A construção geométrica correspondente a esta identidade está disponível no link:

<https://www.geogebra.org/m/qkhnxmcd>

**Identidade 4.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2$ .

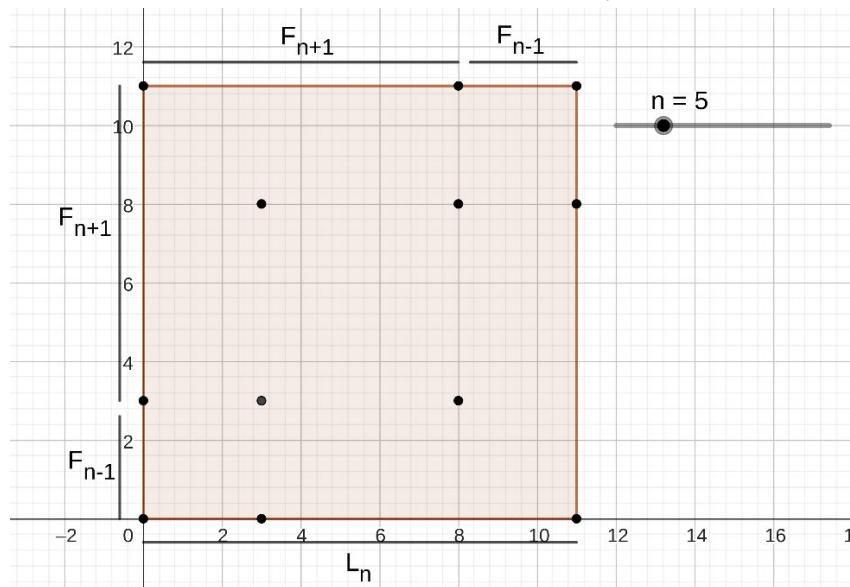
*Demonstração.* Usando a identidade  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ , segue que

$$\begin{aligned} 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2 &= 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - (F_{n+1} - F_{n-1})^2 \\ &= F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} = (F_{n+1} + F_{n-1})^2 = L_n^2, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Agora, será representada a identidade  $L_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2$ . Para tanto é desenhado inicialmente um quadrado de lado  $L_n$ , conforme mostra a Figura 5.

**FIGURA 5:** Quadrado de lado  $L_n$

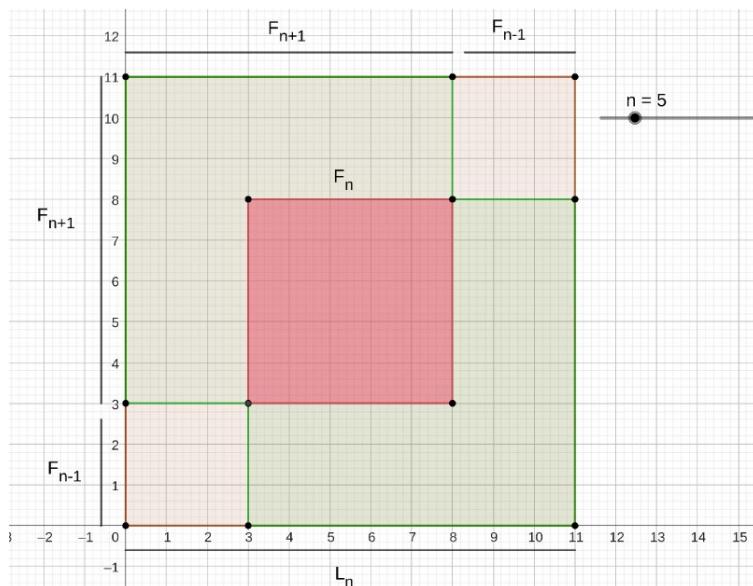


**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Como  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ , dois quadrados de lado  $F_{n+1}$  são colocados em dois vértices opostos em diagonal. Nos vértices restantes, tem-se dois quadrados de lado  $F_{n-1}$  e, centralmente um quadrado sobreposto de lado  $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$ . Na Figura 6, a representação geométrica da Identidade 4 pode ser visualizada.

**FIGURA 6:** Representação geométrica da Identidade 4





**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Sendo assim, a área do quadrado de lado  $L_n$  pode ser expressa por:

$$L_n^2 = F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 + F_{n-1}^2 - F_n^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}^2 - F_n^2.$$

No link a seguir, a construção geométrica da identidade está disponibilizada.

<https://www.geogebra.org/m/cuscxvuz>

**Identidade 5.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $L_n^2 = 8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2$ .

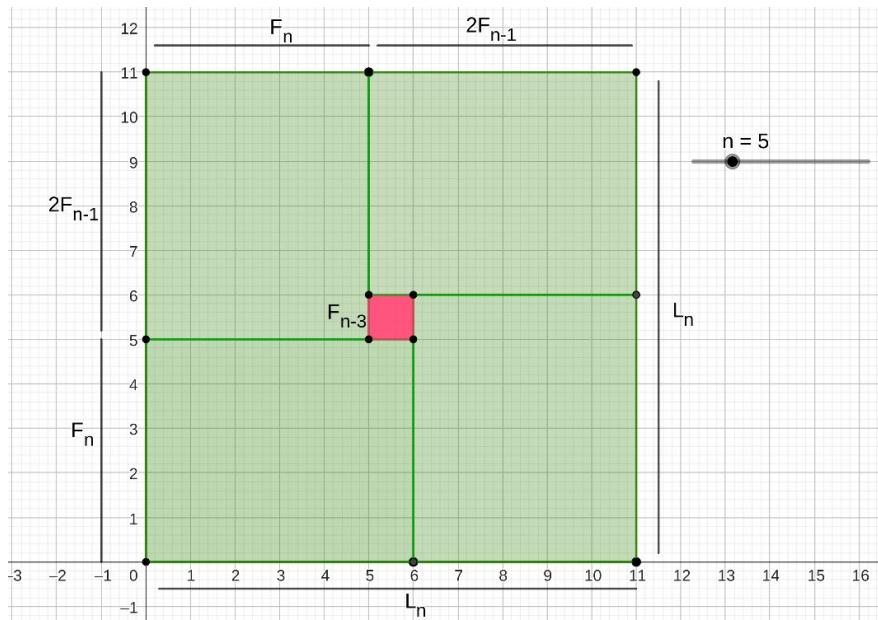
*Demonstração.* Tem-se que

$$8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2 = 8F_n F_{n-1} + (2F_{n-1} - F_n)^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_n F_{n-1} + F_n^2 = (2F_{n-1} + F_n)^2 = L_n^2,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Para a visualização da identidade  $L_n^2 = 8F_n F_{n-1} + F_{n-3}^2$ , primeiramente um quadrado de lado  $L_n$  é desenhado. Como  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}$ , então quatro retângulos congruentes de lados iguais a  $2F_{n-1}$  e  $F_n$  são traçados, em cada um dos vértices do quadrado. Na Figura 7, está evidenciada a representação geométrica da identidade referida.

**FIGURA 7:** Representação geométrica da Identidade 5



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Neste processo é gerado um quadrado na parte central. O lado deste quadrado é dado por:

$$L_n - 2F_n = F_n + 2F_{n-1} - 2(F_{n-1} + F_{n-2}) = F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3}.$$

Assim a área do quadrado localizado centralmente é dada por  $F_{n-3}^2$ . Logo, a área do quadrado de lado  $L_n$  é

$$L_n^2 = 4(2F_{n-1}F_n) + F_{n-3}^2 = 8F_{n-1}F_n + F_{n-3}^2.$$

A construção geométrica da Identidade 5 é encontrada no link:

<https://www.geogebra.org/m/tznprnh>

**Identidade 6.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$ .

*Demonstração.* Reescrevendo  $4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$ , segue que

$$\begin{aligned} 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 &= 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + (F_{n-1} - F_{n-2})^2 \\ &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3F_{n-2}^2 - 2F_{n-1}F_{n-2} \\ &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3(F_n - F_{n-1})^2 - 2F_{n-1}(F_n - F_{n-1}) \\ 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 &= 4F_n^2 + 5F_{n-1}^2 - 3F_n^2 + 6F_nF_{n-1} - 3F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_n + 2F_{n-1}^2 \\ &= (F_n + 2F_{n-1})^2 = L_n^2, \end{aligned}$$

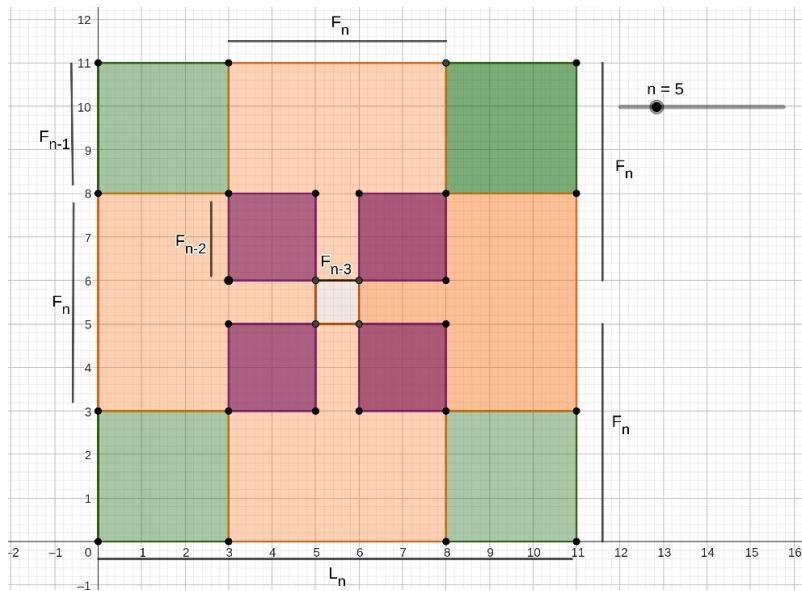
para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Na representação da identidade  $L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$ , começa-se com um quadrado de lado  $L_n$ , da mesma forma como construído na Figura 5.

Considerando que  $L_n = 2F_{n-1} + F_n$ , divide-se cada lado em segmentos de comprimento  $F_{n-1}$ ,  $F_n$  e  $F_{n-1}$ , nesta ordem. Usando os segmentos de comprimento  $F_n$ , são construídos quatro quadrados de lado  $F_n$ , conforme indicados na Figura 8.

**FIGURA 8:** Representação geométrica da Identidade 6





**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Os quatro quadrados de lado  $F_n$  se sobrepõem, formando quatro quadrados congruentes de lado  $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ . O lado do quadrado formado na parte central tem o seguinte comprimento:

$$L_n - 2F_n = F_n + 2F_{n-1} - 2F_n = 2F_{n-1} - (F_{n-1} + F_{n-2}) = F_{n-3}.$$

Logo, a área do quadrado localizado centralmente é dada por  $F_{n-3}^2$ . Somando as áreas dos quadrados de lado  $F_n$ ,  $F_{n-1}$ ,  $F_{n-3}$  e, subtraindo as áreas que aparecem em sobreposição dos quadrados de lado  $F_{n-2}$ , constata-se que a representação geométrica da identidade é determinada da seguinte forma:  $L_n^2 = 4F_n^2 + 4F_{n-1}^2 - 4F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2$ .

A construção geométrica da identidade no software GeoGebra é encontrada no link:

<https://www.geogebra.org/m/hvrbqds>

**Identidade 7.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1}$ .

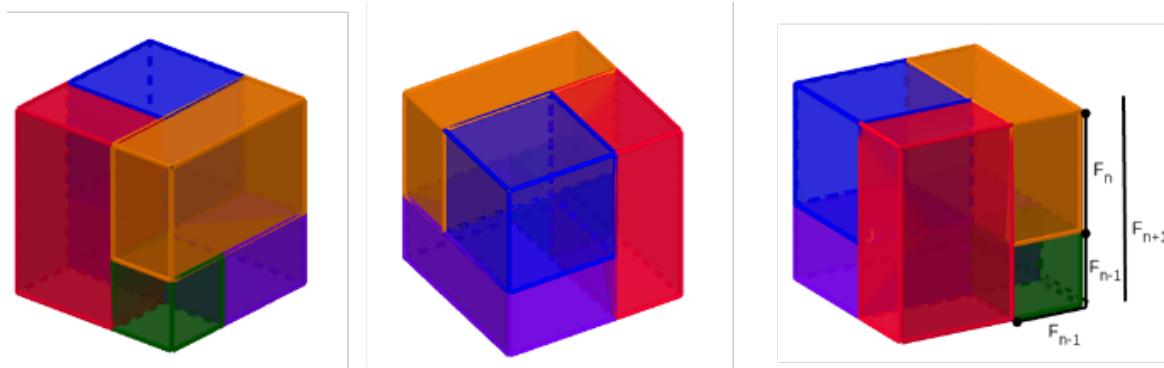
*Demonstração.* Usando a definição da sequência de Fibonacci segue que

$$F_{n+1}^3 = (F_n + F_{n-1})^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_n(F_n + F_{n-1}) = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

A representação dessa identidade está ilustrada na Figura 9, onde o cubo maior de aresta medindo  $F_{n+1}$  é composto por um cubo de aresta medindo  $F_n$ , um cubo de aresta  $F_{n-1}$  e três paralelepípedos retos congruentes com arestas de tamanho  $F_{n-1}$ ,  $F_n$  e  $F_{n+1}$ . Assim, o volume do cubo maior é a soma do volume dos 5 sólidos que o compõem, ilustrando a identidade acima.

**FIGURA 9:** Representação geométrica da Identidade 7, em diferentes perspectivas



FONTE: Acervo da Pesquisa

No link a seguir, é possível clicar nas caixas para exibir/esconder os 5 sólidos que compõem o cubo maior, facilitando a visualização das disposições desses sólidos. Além disso é possível visualizar todos os lados do cubo movendo com o mouse na janela 3D:

<https://www.geogebra.org/m/yvx7j3rg>

## 2. O Paradoxo de Cassini

Nesta seção, será efetuada uma análise do Paradoxo de Cassini em paralelo com sua representação geométrica.

A Identidade de Cassini  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ , com  $n \geq 1$ , nos remete a um dos paradoxos geométricos mais fascinantes. Esta identidade, nomeada desta forma por Grimaldi (2012, p. 55), “foi descoberta em 1680 pelo astrônomo e matemático franco-italiano Giovanni Domenico (Jean Domenique) Cassini (1625-1712). Este resultado também foi descoberto de forma independente em 1753 pelo matemático e artista paisagista escocês Robert Simson (1687-1768)” (Grimaldi, 2012, p. 10, tradução nossa).

A Identidade de Cassini apresenta comportamento diferente quando  $n$  é par ou ímpar. Quando  $n = 2k$  tem-se

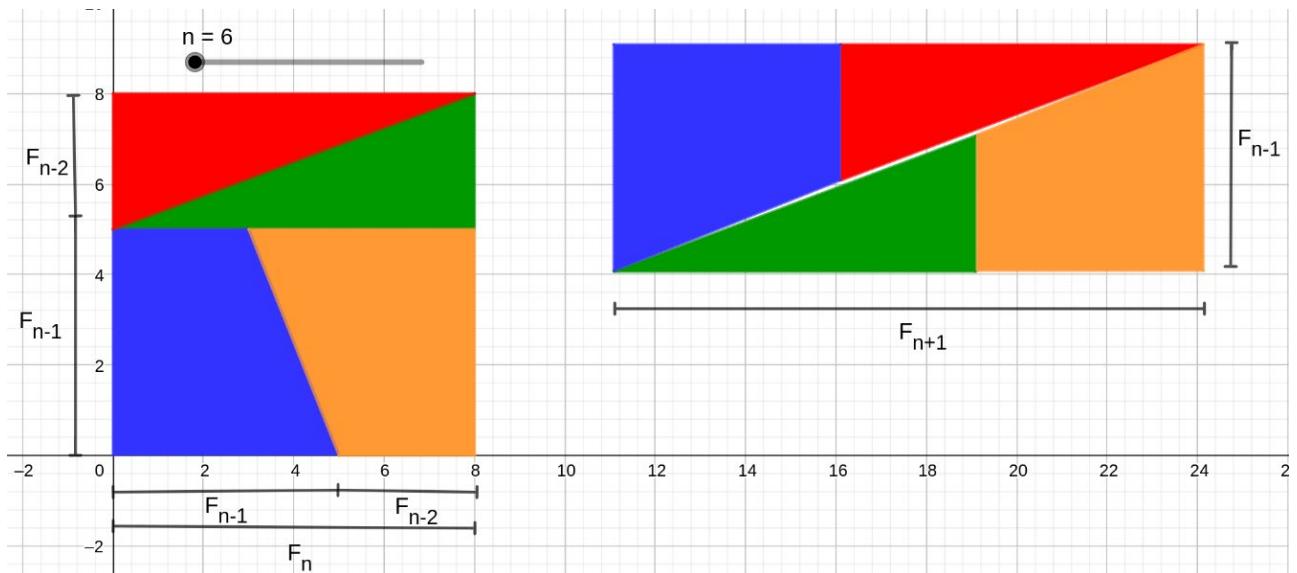
$$F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2 = 1,$$

e quando  $n = 2k + 1$  tem-se

$$F_{2k+2}F_{2k} - F_{2k+1}^2 = -1.$$

Em um primeiro instante, um quadrado de lado  $F_n$  foi dividido em dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes, conforme a Figura 10. Ao reorganizar estes triângulos e trapézios tem-se um retângulo de lados medindo  $F_{n+1}$  e  $F_{n-1}$ . Efetuando o cálculo da área, nota-se que a área do retângulo será de uma unidade a mais em relação à área do quadrado, quando  $n$  é par. Caso  $n$  seja ímpar haverá uma sobreposição, e com isso a área do retângulo será uma unidade a menos em relação à área do quadrado.

**FIGURA 10:** Representação geométrica do Paradoxo de Cassini, para  $n = 2k$



FONTE: Acervo da Pesquisa

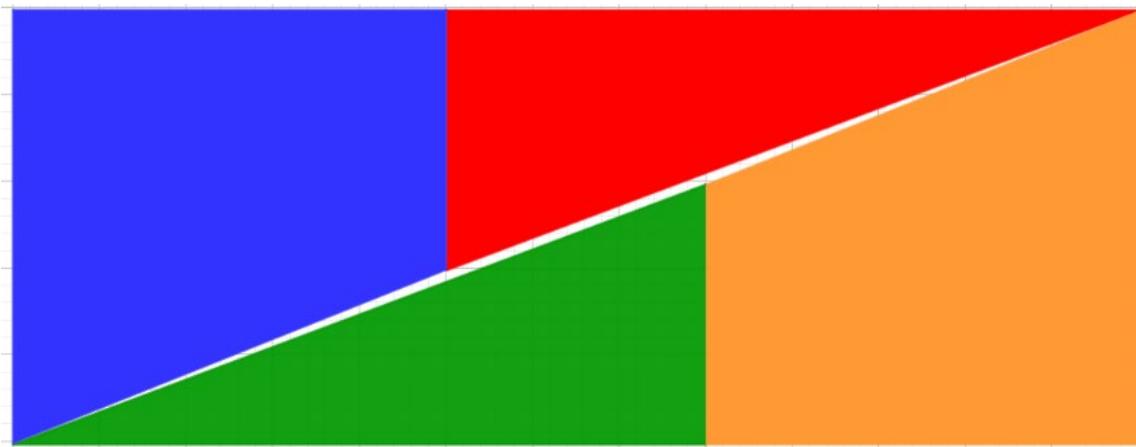
A construção interativa da Figura 10 pode ser encontrada no link a seguir

<https://www.geogebra.org/m/xyhg64nw>

onde o leitor poderá verificar ambos os casos (para  $n$  par ou ímpar). Na construção, é possível observar que as figuras que formam o quadrado (lado esquerdo) são fixas enquanto as demais (lado direito) podem ser movimentadas.

Se observar atentamente a representação, da Figura 10, verifica-se a existência de um paralelogramo no centro do retângulo. Por meio da ampliação do retângulo no GeoGebra, de acordo com a Figura 11 a existência de tal paralelogramo pode ser constatada.

**FIGURA 11:** Retângulo ampliado para visualizar o paralelogramo do Paradoxo de Cassini, para  $n = 2k$



FONTE: Acervo da Pesquisa

O paralelogramo possui área de uma unidade quadrada. A altura  $h$  deste paralelogramo pode ser obtida por meio da utilização da fórmula da área do paralelogramo. Assim,

$$A_{\text{paralelogramo}} = h \cdot \text{base}, \quad \Rightarrow \quad 1 = h \cdot \sqrt{F_n^2 + F_{n-2}^2},$$

portanto

$$h = \frac{1}{\sqrt{F_n^2 + F_{n-2}^2}}.$$

Com isto, observa-se que à medida que o tamanho do quadrado original aumenta, a altura do paralelogramo fica cada vez menor, o que torna o paralelogramo quase que imperceptível.

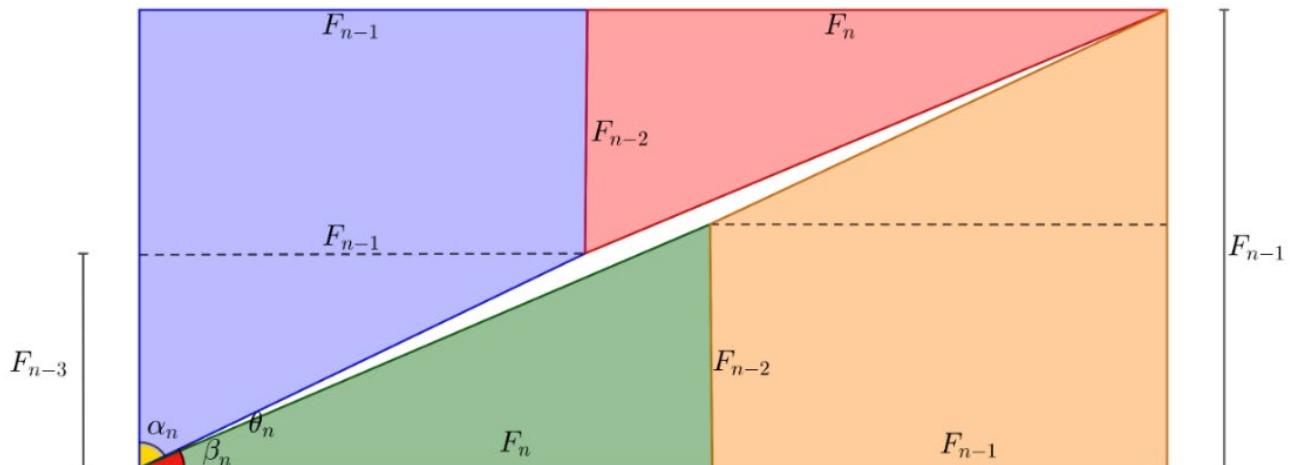
O matemático australiano Alwyn Francis Horadam (1923-2016), demonstrou no artigo *Fibonacci Sequences and a Geometrical Paradox* (Horadam, 1962), uma fórmula para  $\tan \theta_n$ , em que  $\theta_n$  denota o ângulo agudo entre os lados adjacentes do paralelogramo. A seguir, a demonstração será reproduzida, onde serão empregadas as identidades

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad \text{e} \quad F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2,$$

e a identidade trigonométrica  $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

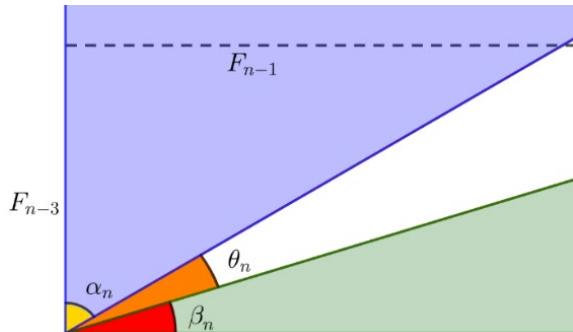
i) **Caso  $n$  par.** Por meio da Figura 12 observa-se a representação geométrica, de maneira exagerada, do caso em que  $n$  é par. Já na Figura 13, tem-se em destaque os ângulos para melhor visualização.

**FIGURA 12:** Representação geométrica exagerada do Paradoxo de Cassini para  $n = 2k$



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

**FIGURA 13:** Destaque nos ângulos da representação geométrica do Paradoxo de Cassini para  $n = 2k$



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Nota-se que

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - (\alpha_n + \beta_n) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right).$$

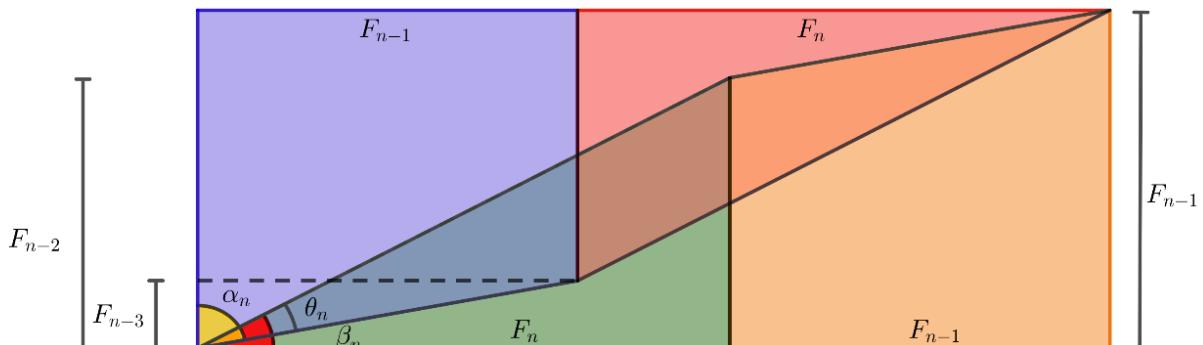
Ou seja,

$$\begin{aligned}\tan \theta_n &= \frac{\left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}\right) - \left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right)}{1 + \left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}\right)\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right)} = \frac{F_{n-3}F_n - F_{n-1}F_{n-2}}{F_{n-1}F_n + F_{n-3}F_{n-2}} \\ &= \frac{F_{n-3}(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2}(F_{n-2} + F_{n-3})}{F_{n-1}(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-3}F_{n-2}} \\ &= \frac{F_{n-3}F_{n-1} - F_{n-2}^2}{F_{n-1}^2 + F_{n-2}(F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-3}F_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-3}F_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} = \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}}.\end{aligned}$$

*ii) Caso  $n$  ímpar.* Pela Figura 14, a qual representa de forma exorbitante o caso em que  $n$  é ímpar, constata-se que:

$$\theta_n = (\alpha_n + \beta_n) - \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) - \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}\right).$$

**FIGURA 14:** Representação geométrica exagerada do Paradoxo de Cassini para  $n = 2k + 1$



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

De modo análogo ao caso anterior, obtém-se

$$\tan \theta_n = \frac{(-1)^{n-1}}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} = \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}}.$$

Por consequência, nos dois casos produzem o mesmo valor para  $\tan \theta_n$ . Assim,

$$\tan \theta_n = \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}},$$

onde  $n \geq 4$ .

Em vista disso, decorre que quando  $n$  tende a infinito tem-se que  $\theta_n$  tende a zero o qual é uma outra constatação do fato de que o paralelogramo se torna quase imperceptível para  $n$  arbitrariamente grande. Na Tabela 1 estão listados alguns valores de  $\theta_n$  para os trigêmeos de Fibonacci ( $F_{n-1}, F_n, F_{n+1}$ ).

**Tabela 1.** Ângulos do Paradoxo de Cassini, para  $4 \leq n \leq 10$ 

<b>Trigêmeos de Fibonacci</b>				
<b><math>n</math></b>	<b><math>F_{n-1}</math></b>	<b><math>F_n</math></b>	<b><math>F_{n+1}</math></b>	<b><math>\theta_n</math></b>
4	2	3	5	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \approx 8^\circ 7' 48''$
5	3	5	8	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{17}\right) \approx 3^\circ 21' 59''$
6	5	8	13	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{46}\right) \approx 1^\circ 14' 43''$
7	8	13	21	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{119}\right) \approx 28' 53''$
8	13	21	34	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{313}\right) \approx 10' 59''$
9	21	34	55	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{818}\right) \approx 4' 12''$
10	34	55	89	$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2143}\right) \approx 1' 36''$

**Fonte:** Dados da Pesquisa

### 3. Gibonacci e Geometria Analítica

Por fim, são abordadas algumas ocorrências que esboçam a relação entre a sequência de Gibonacci  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e a Geometria Analítica, que podem ser consultadas em Jaiswal (1969). Usando o software GeoGebra, são apresentadas a seguir três ocorrências: uma no plano e duas no espaço. Estas propriedades podem ser introduzidas em qualquer curso de graduação que contenha a disciplina de Geometria Analítica na sua grade.

**Teorema 1.** Dados  $n, p, q, r \in \mathbb{N}$ , a área do triângulo com vértices  $(G_n, G_{n+r})$ ,  $(G_{n+p}, G_{n+p+r})$  e  $(G_{n+q}, G_{n+q+r})$  é independente de  $n$ , onde  $G_k$  representa o  $k$ -ésimo número de Gibonacci.

*Demonstração.* A área do triângulo equivale à metade do valor absoluto do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} G_n & G_{n+r} & 1 \\ G_{n+p} & G_{n+p+r} & 1 \\ G_{n+q} & G_{n+q+r} & 1 \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$D = G_{n+p}G_{n+q+r} - G_{n+q}G_{n+p+r} - (G_nG_{n+q+r} - G_{n+q}G_{n+r}) + G_nG_{n+p+r} - G_{n+p}G_{n+r}.$$

Agrupando as parcelas deste determinante e, usando a identidade

$$G_nG_{m+k} - G_{n+k}G_m = (-1)^{n+1}F_kF_{m-n}cd,$$

onde  $cd = a^2 + ab - b^2$ , obtém-se que



$$\begin{aligned}
 D &= (-1)^{n+p+1} F_r F_{n+q-(n+p)} cd - (-1)^{n+1} F_r F_{n+q-n} cd + (-1)^{n+1} F_r F_{n+p-n} cd \\
 &= (-1)^{n+p+1} F_r F_{q-p} cd + (-1)^n F_r F_q cd + (-1)^{n+1} F_r F_p cd \\
 &= (-1)^n F_r cd ((-1)^{p+1} F_{q-p} + F_q - F_p).
 \end{aligned}$$

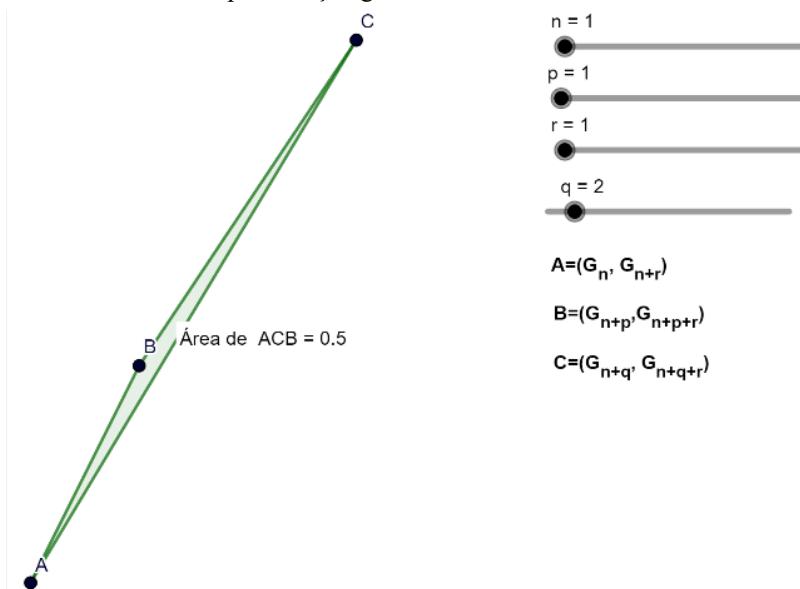
Logo, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{F_r cd |(-1)^{p+1} F_{q-p} + F_q - F_p|}{2}.$$

Em consequência, a área do triângulo com vértices  $(G_n, G_{n+r})$ ,  $(G_{n+p}, G_{n+p+r})$  e  $(G_{n+q}, G_{n+q+r})$  é independente de  $n$ , para todos  $n, p, q, r \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Por meio da Figura 15 pode-se visualizar a representação geométrica do Teorema 1. Controles deslizantes para  $n, p, r$  e  $q$  foram incluídos, onde é possível constatar que ao variar o valor de  $n$  não há alteração no valor da área correspondente.

**FIGURA 15:** Representação geométrica do Teorema 1



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Esta construção geométrica está disponível no link:

<https://www.geogebra.org/m/afpbq4pr>

**Corolário 1.** A área de um triângulo de vértices  $(F_n, F_{n+h})$ ,  $(F_{n+2h}, F_{n+3h})$  e  $(F_{n+4h}, F_{n+5h})$  é dada por

$$F_h \cdot \frac{(F_{4h} - 2F_{2h})}{2},$$

onde  $n, h \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* A demonstração segue, tomando  $r = h$ ,  $p = 2h$ ,  $q = 4h$ , e  $a = b = 1$  no Teorema 1.  $\square$

A representação geométrica do Corolário 1 é disponibilizada no link:

<https://www.geogebra.org/m/zsyr5qnq>



Ao analisar a representação geométrica referente à área do triângulo, pode-se observar que variando o controle deslizante, o triângulo se torna cada vez mais "estreito", dando a impressão de que o triângulo se assemelha a um segmento de reta.

Os seguintes teoremas exprimem ocorrências entre a sequência de Fibonacci e a Geometria Analítica no espaço.

**Teorema 2.** Sejam  $n, p, q \in \mathbb{N}$ . As retas que passam pela origem na direção dos vetores dados por  $(G_n, G_{n+p}, G_{n+q})$  são coplanares para todo  $n$ , onde  $p$  e  $q$  são constantes.

*Demonstração.* Considere três retas que passam pela origem, com seus respectivos vetores diretores,  $(G_i, G_{i+p}, G_{i+q}), (G_j, G_{j+p}, G_{j+q})$  e  $(G_k, G_{k+p}, G_{k+q})$ .

Para mostrar que estas retas sejam coplanares, é preciso mostrar que o valor do determinante

$$D = \begin{vmatrix} G_i & G_{i+p} & G_{i+q} \\ G_j & G_{j+p} & G_{j+q} \\ G_k & G_{k+p} & G_{k+q} \end{vmatrix},$$

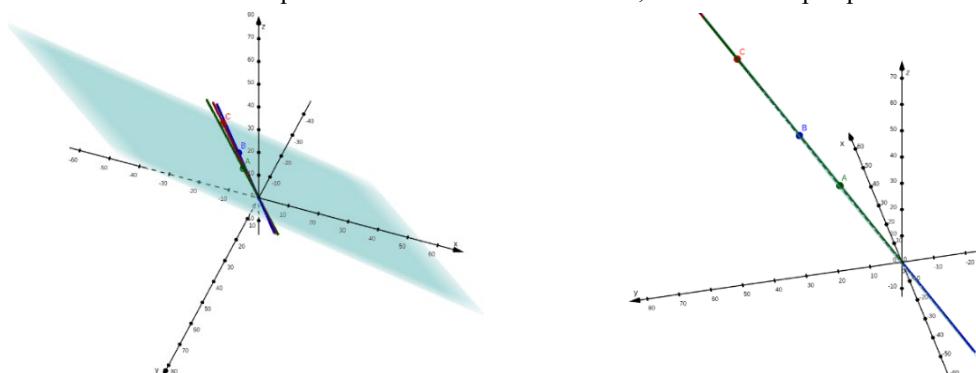
seja igual a zero. Empregando a identidade  $G_{m+n} = G_m F_{n+1} + G_{m-1} F_n$ , segue que

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} G_i & G_i F_{p+1} + G_{i-1} F_p & G_i F_{q+1} + G_{i-1} F_q \\ G_j & G_j F_{p+1} + G_{j-1} F_p & G_j F_{q+1} + G_{j-1} F_q \\ G_k & G_k F_{p+1} + G_{k-1} F_p & G_k F_{q+1} + G_{k-1} F_q \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} G_i & G_{i-1} F_p & G_{i-1} F_q \\ G_j & G_{j-1} F_p & G_{j-1} F_q \\ G_k & G_{k-1} F_p & G_{k-1} F_q \end{vmatrix} \\ &= F_p F_q \begin{vmatrix} G_i & G_{i-1} & G_{i-1} \\ G_j & G_{j-1} & G_{j-1} \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-1} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

onde de  $n, p, q \in \mathbb{N}$ , com  $p$  e  $q$  constantes. □

A Figura 16 ilustra o Teorema 2.

**FIGURA 16:** Plano que contém as retas no Teorema 2, em diferentes perspectivas



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Uma visualização dinâmica, usando o controle deslizante, pode ser encontrada no seguinte link:

<https://www.geogebra.org/m/z2wvffyx>



**Teorema 3.** Sejam  $n, p, q, r \in \mathbb{N}$ . A família de planos  $G_nx + G_{n+p}y + G_{n+q}z + G_{n+r} = 0$  se interceptam em uma reta cuja equação é independente de  $n$ , onde  $p, q$  e  $r$  são constantes.

*Demonstração.* Como os vetores normais da família de planos são todos diferentes, basta interceptar dois planos quaisquer dessa família e resolver o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} G_i x + G_{i+p} y + G_{i+q} z + G_{i+r} = 0 \\ G_j x + G_{j+p} y + G_{j+q} z + G_{j+r} = 0, \end{cases}$$

cuja solução é a reta

$$r: \begin{cases} x = \frac{-G_{i+r}G_{j+p} + G_{i+p}G_{j+r}}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} - \left( \frac{G_{i+q}G_{j+p} - G_{i+p}G_{j+q}}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} \right) \lambda \\ y = \frac{-G_iG_{j+r} + G_{i+r}G_j}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} - \left( \frac{G_iG_{j+q} - G_{i+q}G_j}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} \right) \lambda \\ z = \lambda, \end{cases}$$

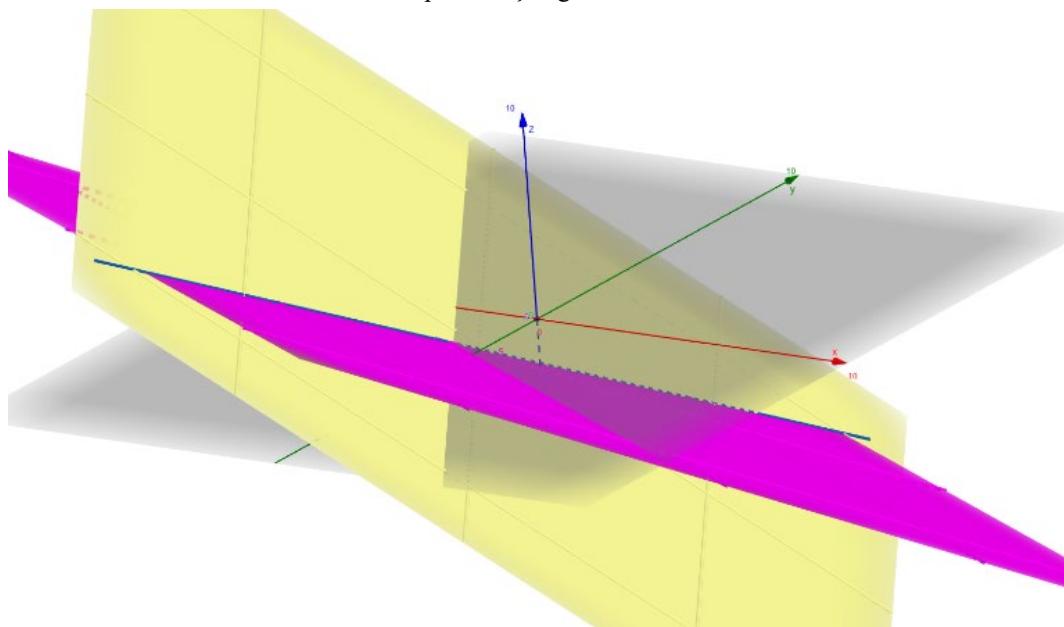
com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Usando a identidade  $G_nG_{m+k} - G_{n+k}G_m = (-1)^{n+1}F_kF_{m-n}cd$ , onde  $cd = a^2 + ab - b^2$ , tem-se que a reta  $r$  resulta em

$$x = (-1)^p \frac{F_{r-p}}{F_p} - (-1)^q \frac{F_{p-q}}{F_p} \lambda, \quad y = -\frac{F_r}{F_p} - \frac{F_q}{F_p} \lambda, \quad z = \lambda,$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que não depende de  $n$ . □

A Figura 17 ilustra o Teorema 3.

**FIGURA 17:** Representação geométrica do Teorema 3



**FONTE:** Acervo da Pesquisa

Para obter uma visualização dinâmica, usando o controle deslizante, basta acessar o seguinte link:

<https://www.geogebra.org/m/mzhgusdj>



## Considerações finais

Neste trabalho, é possível observar como o GeoGebra pode ser uma ferramenta valiosa para a exploração visual de identidades envolvendo as sequências de Fibonacci e Lucas, a percepção do que realmente ocorre no paradoxo de Cassini e a dinamização que surge entre a sequência de Fibonacci e a Geometria Analítica. A visualização muitas vezes facilita a compreensão de conceitos mais abstratos.

Um outro recurso que o GeoGebra fornece para aprimorar a aprendizagem de teorias é a interação entre o usuário e os objetos trabalhados em janelas 2D e 3D.

## Referências

- Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (2003). *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. Washington, DC: American Mathematical Society.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF.
- Eves, H. (2004). *Introdução à história da Matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP.
- Grimaldi, R. P. (2012). *Fibonacci and Catalan numbers: an introduction*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Horadam, A. F. (1961). A Generalized Fibonacci Sequence. *The American Mathematical Monthly*, 68(5), 455–459. <https://doi.org/10.1080/00029890.1961.11989696>
- Horadam, A. F. (1962). Fibonacci Sequences and a Geometrical Paradox. *Mathematics Magazine*, 35(1), 1–11. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1962.11975283>
- Jaiswal, D. V. (1969). On Determinants Involving Generalized Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 7(3), 319–330. <https://doi.org/10.1080/00150517.1969.12431161>
- Koshy, T. (2017). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, (v. 1, 2. ed). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Sigler, L. (2003). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York, NY: Springer-Verlag.

Enviado: 16/12/2024

Aceito: 23/04/2025

