emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.65151

Cálculo de Áreas de Regiões Planas Irregulares: currículo, soluções numéricas e produto educacional para o Ensino Médio

Calculation of Areas of Irregular Shaped Regions: curriculum, numerical solutions and educational product for the high school

Evando Santos Araújo[1]

Jurandir Manoel Lopes da Silva[2]

RESUMO

O cálculo de áreas de regiões planas se mostra como um tema de grande importância para a formação do aluno em nível básico, pela interdisciplinaridade de suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Na prática em sala de aula, um dos objetivos mais trabalhados envolve reconhecer a área como grandeza associada a figuras geométricas usuais (quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, entre outros) e solucionar problemas envolvendo essa grandeza com o uso de diferentes ferramentas de medição e/ou unidades de medida. Por outro lado, situações-problema reais como a determinação da vazão, pressão, superfície de contato, áreas desmatadas e até mesmo o monitoramento de úlceras envolvem o cálculo de áreas de regiões planas irregulares (sem uma forma geométrica definida) e geralmente não são apresentadas e/ou discutidas nos materiais didáticos do Ensino Médio (mesmo com sua importância reconhecida). Nesse contexto, esse trabalho propôs uma pesquisa bibliográfica exploratória com os objetivos de conhecer o atual currículo e métodos numéricos relativos ao cálculo de áreas de regiões irregulares. Na sequência do estudo, esses conceitos foram aplicados no desenvolvimento de um produto educacional, com uma proposta de sequência didática, para o ensino significativo de cálculo de áreas no 2° Ano do Ensino Médio, levando-se em consideração o ambiente o qual o aluno está inserido. Espera-se que esta pesquisa possa servir como material didático para auxiliar professores de Matemática que desejam expandir o conceito de área para a solução de problemas de ordem prática.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática; geometria plana; cálculo de áreas; métodos numéricos; aplicações.*

ABSTRACT

The calculation of areas of flat regions is a topic of great importance for student training at a basic level, due to the interdisciplinarity of its applications in different areas of knowledge. In classroom practice, one of the objectives involves recognizing the area as a quantity associated with common geometric figures (square, rectangle, triangle, trapezoid, among others) and solving problems involving this quantity using different measurement tools and/or units of measurement. On the other hand, real problem situations such as determining flow, pressure, contact surface, deforested areas and even ulcers monitoring involve the calculation of areas of irregular flat regions (without a defined geometric shape) and are generally not presented and/or discussed in high school teaching materials (even with their importance recognized). In this context, this work proposed an exploratory bibliographical research with the objectives of understanding the current curriculum and numerical

[1]. Professor dos Programas de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais na Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF. E-mail: evando.araujo@univasf.edu.br.

[2]. Mestre em Matemática pelo PROFMAT/UNIVASF. E-mail: jurandir1lopes@yahoo.com.br.

methods related to the calculation of areas of irregular regions. Following the study, these concepts were applied in the development of an educational product, with a proposed didactic sequence, for the meaningful teaching of area calculation in 2 ° Year of High School, considering the environment in which the student is inserted. It is hoped that this research can serve as teaching material to assist Mathematics teachers who wish to expand the concept of area to solve practical problems.
Keywords*: Teaching Mathematics; 2D geometry; area calculation; numerical methods; applications.*

Introdução

O conceito de área pode ser entendido como a quantidade que uma região plana (delimitada por entes geométricos) ocupa no espaço bidimensional que a contém (NUNES, 2011; SANTOS, M. R.; SANTOS, M. C., 2015; COSTA; BATISTA; MORAIS, 2019; LINTZ, 2020).

O cálculo de áreas é um dos temas mais importantes no contexto do estudo da geometria plana no Ensino Básico pela interdisciplinaridade de suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, essenciais para estudos científicos e tecnológicos em nível superior (CARDOSO, 2019). Alguns exemplos envolvem o entendimento de fenômenos e solução de problemas reais da atualidade, tais como na cinemática de corpos (THIEGHI, 2021), cálculo de vazão (SILVA, 2016; SANTOS, 2021), pressão, e centroide de superfícies para dimensionamento de estruturas em engenharia (CARDOSO, 2020), dimensionamento de circuitos elétricos, determinação da porosidade e superfície de contato de materiais (TEIXEIRA; COUTINHO; GOMES, 2001), análise da absorção e emissão de luz de substâncias químicas (VERONEZ, 2017), estudo da termodinâmica, capacidade térmica, entropia, densidade demográfica (SANTOS, M. R.; SANTOS, M. C., 2015), georreferenciamento de imóveis rurais (COSTA, 2018), prevenção de inundações (VASCONCELOS *et al*., 2017), perfil de infiltração de água no solo (PEREIRA, 2007), delimitação de terras e desmatamento (PUHL; DIAS, 2017), e até métodos computacionais de aferimento do tamanho de úlceras para a determinação do tratamento adequado (SALMORA *et al.,* 2016).

No Ensino Fundamental - Anos Iniciais, a partir do 4º ano, os alunos começam a estudar de forma intuitiva o conceito de área, realizando, por exemplo, contagem de quadrados que compõem a região poligonal de desenhos geométricos específicos. A partir do Ensino Fundamental - Anos Finais (do 6º ao 9º ano), o conceito de área é apresentado utilizando a decomposição de regiões poligonais por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas (BRASIL, 2018). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) descreve que a expectativa elencada para os alunos dos Anos Finais é a de que eles possam reconhecer a área como grandeza associada a figuras geométricas e que consigam resolver problemas relacionados fazendo uso das leis de formação para o cálculo de áreas de regiões planas regulares (triângulos, quadriláteros e círculos), de diferentes ferramentas de medição e/ou de unidades de medida padronizadas. Nesse contexto, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 315) ainda destaca que o ensino desse tema deve envolver a proposta de "resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área em situações como determinar a medida de terrenos".

Para o Ensino Médio, a proposta da BNCC na área de Matemática e suas Tecnologias envolve consolidar, ampliar, aprofundar e relacionar os conhecimentos construídos pelos alunos no nível Fundamental com as habilidades e competências elencadas para a aprendizagem significativa neste nível escolar. Como exemplo, a BNCC destaca a necessidade de se trabalhar as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT307, as quais indicam a proposição de ações didático-pedagógicas que envolvam o cálculo de áreas com situações reais na comunidade do aluno e que empreguem diferentes métodos de medição, incluindo a modelagem e a dedução de expressões matemáticas viáveis às soluções dos problemas (BRASIL, 2018).

De todo modo, diferente do caso das áreas das regiões regulares descritas, pouco se expõe em sala de aula (e até mesmo na literatura) sobre problemas práticos que envolvam o cálculo de áreas de regiões planas irregulares. Entenda-se esse tipo de região como um espaço no plano delimitado por formas geométricas diferentes das regulares ou de formato indefinido, a partir de linhas retas e/ou curvas (ou da combinação entre elas para formar a figura), sem uma lei de formação imediata que possa ser utilizada para o cálculo de sua área (LEE *et al.,* 2006; ARDIYANTO; DWINUGROHO; ARINI, 2012). Essas regiões irregulares são bastante comuns na natureza e nas diversas aplicações citadas anteriormente, mas o cálculo de suas respectivas áreas é pouco explorado no Ensino Médio pelo desconhecimento de métodos adequados ao público-alvo, haja vista suas geometrias não usuais. Soma-se a isso, o fato de que a falta de contextualização desses problemas com situações reais do dia a dia do aluno, tanto na formação básica do professor quanto nos livros didáticos, pode representar outro entrave para a prática dessa proposta, mesmo com as orientações indicadas explicitamente na BNCC (ROCHA; SILVA, 2020; OLIVEIRA *et al*., 2020).

Diante da importância do tema para a aprendizagem significativa de Matemática, é possível que o professor do Ensino Médio se questione: como problemas de cálculo de áreas de regiões irregulares podem ser trabalhados na escola com métodos elementares de cálculo, acessíveis ao nível escolar do aluno? Na tentativa de apresentar contribuições nesse campo de pesquisa em Ensino de Matemática, realizou-se uma pesquisa bibliográfica, de cunho exploratório, seguindo as etapas de investigação, análise explicativa das soluções e síntese integradora (LIMA; MIOTO, 2007), com os objetivos de abordar o contexto didático-pedagógico do cálculo de áreas recomendado pela BNCC para o Ensino Médio, apresentar técnicas de cálculo numérico para a determinação dessa grandeza e aplicar esses conceitos no desenvolvimento de um produto educacional com uma proposta de sequência didática para o ensino do cálculo de áreas de regiões irregulares. Os resultados da pesquisa são parte integrante da dissertação de mestrado profissional em Matemática de autoria do primeiro autor deste artigo e são apresentados nas seções a seguir.

Áreas de regiões planas na área de Matemática e suas Tecnologias

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018, p. 530) descreve explicitamente que "no Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, habilidades a serem alcançadas nessa etapa", sem indicação de seriação (embora alguns estados, como o de Pernambuco, distribuam as habilidades por bimestre). Nesse sentido, a BNCC ainda discorre que, "as competências não têm uma ordem preestabelecida" (BRASIL, 2018, p. 530). Com esse consenso, o cálculo de áreas é trabalhado nos três anos escolares e a definição anual dos currículos e as propostas pedagógicas das escolas em cada estado brasileiro podem ser flexíveis. Assim, a BNCC deve servir como referência para elaboração e avaliação dos livros didáticos a serem adotados tanto em escolas particulares quanto em escolas públicas em todo o território nacional.

Nesse contexto, a BNCC (BRASIL, 2018) orienta (além de consolidar e ampliar conhecimentos adquiridos) habilidades tais como empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície, resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, e ainda representar graficamente a variação da área de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam (Quadro 1). A expectativa é que os alunos compreendam que o ato de medir é comparar uma grandeza com uma unidade padrão e expressar o resultado da comparação por meio de um número. Além disso, os estudantes devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvam outras grandezas relacionadas, tais como comprimento, massa, tempo e temperatura (BRASIL, 2018). Assim, o cálculo de área também é indicado na BNCC como pré-requisito para o cálculo de volumes de figuras geométricas tridimensionais (Quadro 1).

QUADRO 1. Competências específicas e respectivas habilidades recomendadas pela BNCC (BRASIL, 2018) para o ensino de cálculo de áreas no Ensino Médio.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	HABILIDADES	BNCC
"Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática."	"(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa."	p. 534

"Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente."	"(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais."	p. 536
	"(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais."	p. 537
"Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas."	"(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas."	p. 541
	"(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital."	p. 541

Fonte: Organizado pelos autores a partir de Brasil (2018).

De forma resumida, o cálculo de áreas se apresenta nos livros didáticos com a solução de problemas teóricos e/ou contextualizados envolvendo triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, losangos, pentágonos e hexágonos, além da relação com polígonos regulares inscritos em circunferências (DE QUEIROZ; BORGES, 2022). O cálculo de áreas também se apresenta na resolução de situações-problema envolvendo o volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas (DOJAS NETO, 2023). A área de uma região poligonal também é trabalhada usualmente nos livros didáticos pelo método analítico de determinantes, através da decomposição da figura em triângulos, a partir das coordenadas de seus vértices (DA SILVA *et al.*, 2024).

Nos últimos anos, a importância do cálculo de áreas para a formação do aluno em nível básico também vem sendo amplamente discutida na literatura como resultado de pesquisas desenvolvidas diretamente no ambiente escolar (CARDOSO, 2019). Em trabalho de pesquisa recente, determinou-se o custo para ladrilhar o piso de uma sala, mediante o cálculo de sua área equivalente (OLIVEIRA *et al.,* 2020). Nessa proposta, os autores discutiram desde o contexto histórico do tema, medidas de comprimento, múltiplos e submúltiplos do metro, o conceito de unidade e sua importância, passando pelo conceito e operações com frações e números decimais, até a apresentação de diferentes instrumentos de medição (como a régua e a trena) necessários ao cálculo das áreas de salas e os respectivos custos para recobri-las com ladrilhos.

Em outro trabalho realizado na Educação de Jovens e Adultos (EJA) - Ensino Médio, mostrou-se que, mesmo com dificuldades para se calcular áreas de figuras planas, os alunos foram capazes de compreender a diferença entre área e perímetro (ROCHA; SILVA, 2020). Para facilitar esse entendimento, usou-se também o próprio espaço da sala de aula na qual os alunos estudavam, associando o conteúdo aprendido com o meio no qual vivenciam. Os autores ainda destacaram que os alunos puderam utilizar seus conhecimentos profissionais (muitos deles eram comerciantes e até pedreiros) para associar diversos contextos do dia a dia com a Geometria.

Outras pesquisas encontradas na literatura focam na aplicação do tema para o cálculo de áreas de regiões planas irregulares, utilizando diferentes instrumentos que auxiliam nessa medição. Os autores justificam propostas didáticas nesse sentido com o intuito de contextualizar os conteúdos matemáticos com situações reais. Um exemplo é o georreferenciamento de imóveis rurais, uma técnica que "permite determinar a posição exata de um imóvel e a sua área. Nesse mapeamento, estão disponíveis as coordenadas geográficas de posição de todas as suas confrontações, permitindo ao proprietário saber exatamente onde começam e onde terminam as suas terras" (COSTA, 2018, p.1). Um grupo multidisciplinar de professores utilizou o referido método para o mapeamento da área da escola rural onde eles atuam, localizada na região do semiárido do nordeste brasileiro (BRITO, 2021). O georreferenciamento ajudou a identificar, com exatidão, as porções de área construída, de vegetação nativa e de reserva legal da área total do imóvel, com o objetivo de conscientizar os alunos quanto às áreas liberadas para execução de novas obras e à importância da preservação ambiental do bioma Caatinga.

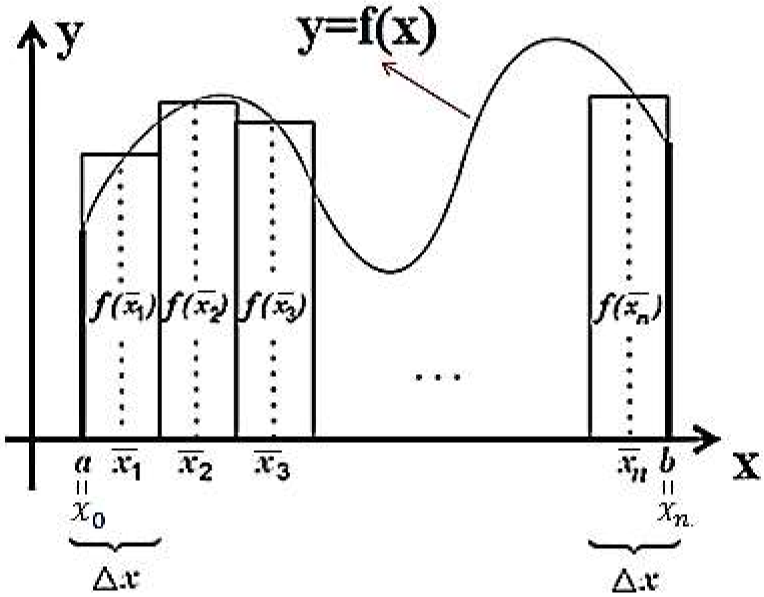
Ainda explorando o próprio espaço geográfico no qual o estudante está inserido, foi possível sugerir uma ação pedagógica para mensurar áreas desmatadas em um determinado período, na região de Bom Princípio-RS (PUHL; DIAS, 2017). As atividades foram orientadas por professores de Matemática e Ciências e envolveram basicamente noções de escala, de proporção e cálculo aproximado dessas áreas a partir da soma de áreas de figuras planas regulares equivalentes. O *software* Google *Earth* foi usado como ferramenta para a obtenção das imagens de satélite das regiões desmatadas, bem como as escalas de medições a serem utilizadas como referência. Como conclusão do estudo, os autores verificaram que essa contextualização do conteúdo, aliada à estratégia de resolução de problemas, influenciou de forma positiva na interação e participação ativa do estudante na construção do próprio conhecimento.

Em outra pesquisa recente, através de uma proposta de sequência didática para o Ensino Médio, contextualizou-se o cálculo de áreas de regiões planas com o caso do rompimento de uma barragem de minério de ferro em Brumadinho-MG, em janeiro de 2019 (CORDEIRO NETO, 2019). O autor destaca que após o ocorrido, ambientalistas e autoridades tiveram que estimar a área total devastada e a modelagem matemática da região evidenciou seu contorno geométrico irregular, o que motivou a proposta com o uso intuitivo e atrativo de técnicas de cálculo integral para determinar o valor aproximado dessa área. É notável que todas essas ações são desenvolvidas para que "os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade" (BRASIL, 2018, p. 527).

Conceitos básicos de métodos numéricos para o cálculo de áreas

Por simplificação, considere uma região no plano xy delimitada na parte superior pelo gráfico de $y = f(x)$, com $y \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, na parte inferior pelo eixo x ($y = 0$) e lateralmente pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 1).

Figura 1 – Região do plano xy delimitada pela função y=f(x), pelo eixo x e pelas retas x=a e x=b.



Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Uma alternativa para se estimar a área total (A) dessa região irregular é aproximá-la pela soma de áreas de n retângulos que a compõe, de bases $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e alturas $f(\overline{x_i})$, onde $\overline{x_i}$ pertence a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com i=1,2,3,..., n e os extremos do intervalo $[a, b]$ sendo representados por $a = x_0$ e $b = x_n$. Assim, essa aproximação pode ser melhorada à medida que aumentamos a quantidade de retângulos no intervalo $[x_0, x_n]$. Somando os n termos, é possível obter a área total ocupada pelos retângulos sob a curva. Esta soma é conhecida como Soma de Riemann da função $f(x)$ e pode ser representada por $S_n(f)$:

$$S_n(f) = f(\overline{x_1}).\Delta x + f(\overline{x_2}).\Delta x + \cdots + f(\overline{x_n}).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x \quad \text{(Eq. 1).}$$

De fato, “para calcular uma área, aproximamos a região por retângulos e fazemos com que o número de retângulos se torne cada vez maior. A área exata será o limite das somas das áreas dos retângulos” (STEWART, 2006, p. 368). Em notação matemática, $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x$ (Eq. 2). Note que se $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$, e $\overline{x_i}$ pode ser tomado como o extremo superior x_i de cada subintervalo, sem perda de generalidade. Assim, a Eq. 2 se resume a:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x \quad \text{(Eq. 3).}$$

A determinação de áreas de regiões planas também está intimamente ligada ao cálculo de integrais. O Teorema da integral definida de uma função $f(x)$ discorre que, se ela é contínua e integrável em [a, b], então a integral definida $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$ (Eq. 4), onde dx é o Δx infinitamente pequeno (STEWART, 2006; FLEMMING; GONÇALVES, 2006).

Em adição, o Teorema Fundamental do Cálculo (STEWART, 2006; FLEMMING; GONÇALVES, 2006) discorre que, se $y = f(x)$ é uma função contínua sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ neste intervalo ($F'(x) = f(x)$), então a integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Eq. 5). Logo, se $f(x) \geq 0$ em [a, b], da análise das Eq. 3, 4 e 5, tem-se que a área (A) da região descrita anteriormente é numericamente igual a integral definida de $f(x)$ em [a, b]. Simbolicamente, $A \overset{N}{=}. \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Eq. 6). Para os casos em que o problema de área no plano xy exige a modelagem do contorno da região plana por uma função $f(x) \leq 0$ ou entre funções, a Eq. 6 ou o referencial podem ser adaptados para atender a demanda com o uso de integrais.

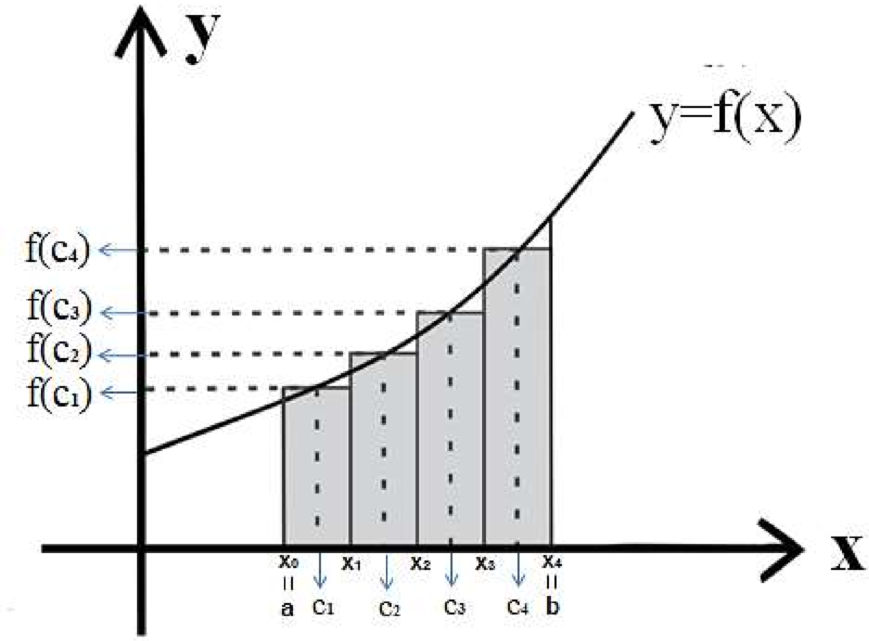
De todo modo, a Eq.6 apresenta duas limitações para estudos de cálculo de áreas de regiões planas irregulares em situações reais. Em primeiro lugar, a função que modela o contorno da região em estudo pode ser conhecida apenas indiretamente, através de uma tabela de dados com valores discretos (número limitado de pontos), e não por uma expressão analítica que defina um caminho contínuo no intervalo estudado. Em segundo lugar, mesmo que a expressão matemática da função $f(x)$ seja conhecida, nem sempre ela possui uma primitiva $F(x)$. Nestes casos, uma alternativa viável é calcular a integral definida (e, consequentemente, a área de uma região plana modelada por esta integral) de forma aproximada, usando alguns métodos numéricos de integração já bem conhecidos na literatura, tais como a Regra do Ponto Médio e a Regra dos Trapézios.

Regra do Ponto Médio

Seja a função cujo gráfico é representado pela curva $y = f(x)$. Note que a área da região plana delimitada por $f(x)$, o eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, pode ser aproximada pela soma de áreas de retângulos que compõem essa região (Figura 2).

Generalizando, a Regra do Ponto Médio discorre que, a área em questão pode ser estimada usando-se a Eq. 1, fazendo-se $\overline{x_i}$ como o ponto médio ($c_i = \frac{x_i - x_{i-1,}}{2}$) do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1,} x_i]$ de [a, b], com i=1,2,3,..., n:

Figura 2. Região sob a curva f(x) no intervalo [a, b] aproximada pela soma de quatro regiões retangulares (n=4), nesse intervalo.



Fonte: Arquivos dos autores (2024).

$A \approx f(c_1).\Delta x + f(c_2).\Delta x + \cdots + f(c_n).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x = \Delta x.\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$ (Eq. 7), onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e as imagens dos pontos médios ($f(c_i)$) são, respectivamente, as bases e as alturas dos n retângulos em [a, b]. Dessa forma, mesmo que a expressão analítica de $f(x)$ não esteja disponível na modelagem do problema, as imagens $f(c_i)$ podem ser determinadas a partir de suas cotas no eixo y, levando-se em consideração a escala de medição e o referencial adotados.

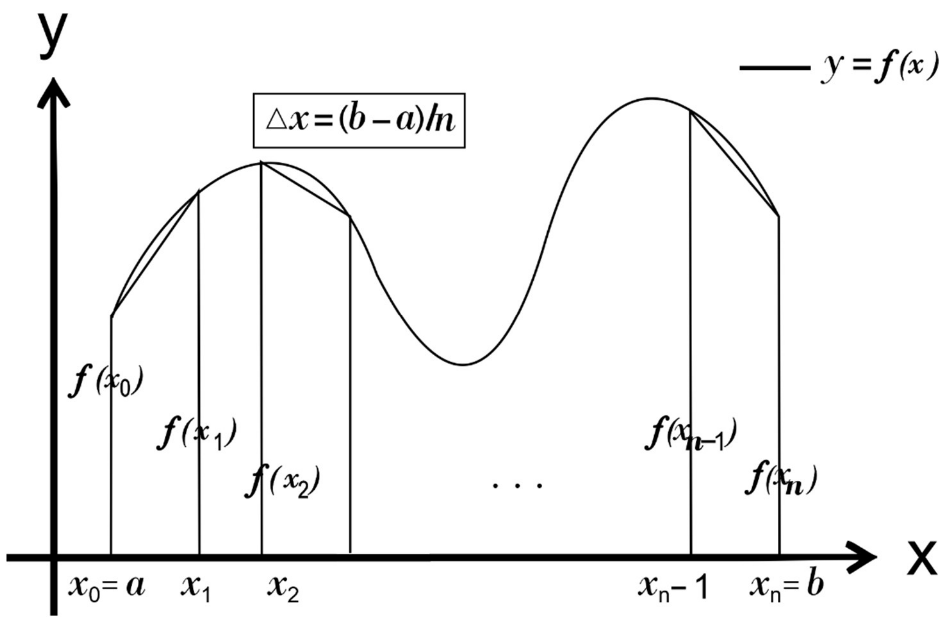
Regra dos Trapézios

De modo geral, a Regra dos Trapézios envolve calcular a área da região delimitada por $f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, aproximando-a pela soma de áreas de trapézios que a compõem (Figura 3). A regra descreve que dividindo o intervalo [a, b] em n subintervalos de tamanhos $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, a área da região sob a curva de $f(x)$ pode ser estimada somando-se as áreas de cada trapézio de alturas Δx e bases $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$, com i=1,2,3,..., n. Organizando-se os termos dessa soma, tem-se:

$$A \approx [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].\frac{\Delta x}{2} \quad \text{(Eq. 8).}$$

É importante destacar que a análise numérica do cálculo de áreas envolve outros conceitos importantes como, por exemplo, a estimação do erro de medição, os quais não serão tratados aqui em detalhes pelo fato de usarmos apenas as ideias de soma de áreas de polígonos regulares para propor uma estimativa do cálculo da área de uma região plana irregular de interesse, para fins didáticos em sala de aula, no Ensino Básico.

Figura 3 - Região sob a curva f(x) no intervalo [a, b] aproximada pela soma de n trapézios que a compõem, nesse intervalo.



Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Produto educacional - sequência didática para o ensino de cálculo de áreas de regiões planas irregulares

Informações iniciais

O presente Produto Educacional descreve uma sequência de atividades para alunos do 2° Ano do Ensino Médio. Espera-se que a proposta possa ser aplicada como material de apoio ao professor para diversificação de suas aulas, propondo atividades experimentais para o cálculo de áreas de regiões planas irregulares através dos métodos numéricos descritos na seção anterior.

A motivação para este trabalho está centrada no fato de que mesmo com a importância e interdisciplinaridade reconhecida do tema para a formação do aluno em nível médio, os materiais didáticos disponíveis, em sua grande maioria, não discutem a proposta do cálculo de áreas de regiões irregulares. Além disso, a abordagem da proposta está de acordo com o conjunto de competências e respectivas habilidades orientadas na BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, no Ensino

Médio (ver Quadro 1). Em adição, a escolha da turma do 2° Ano do Ensino Médio se deu pelo fato de que os alunos das escolas estaduais de Pernambuco já estudaram os conceitos e aplicações de funções elementares e o cálculo de áreas de figuras planas regulares, no Ensino Fundamental e no 1° Ano do Ensino Médio, o que facilita a compreensão dos métodos de cálculo de áreas de regiões planas irregulares para esses alunos. Uma vez que outros estados, cidades e/ou escolas podem ofertar os pré-requisitos listados acima em outra fase escolar do Ensino Médio, a série para aplicação da sequência pode ser adaptada.

Mais especificamente, a proposta se baseia na execução de atividades para o cálculo de áreas de regiões planas irregulares reais utilizando métodos numéricos, como a regra do ponto médio e a regra dos trapézios. Como exemplo neste trabalho, usou-se regiões pertencentes a um município (ou em regiões adjacentes) do interior do estado de Pernambuco, local de atuação de um dos professores autores deste trabalho. Vale destacar que essa proposta pode ser facilmente adaptada para a realidade dos alunos, na localidade onde for aplicada, uma vez que as regiões para o cálculo de áreas podem ser escolhidas livremente pelo professor com vista à representatividade significativa aos alunos. Para a execução da atividade, os alunos poderão utilizar instrumentos de desenho como, por exemplo, régua e/ou esquadro, além de calculadora e planilhas manuais e/ou eletrônicas para anotações e organização dos dados. Uma síntese das informações do Produto Educacional é descrita no Quadro 2. A sequência de atividades é composta por três encontros, cada um com 50 minutos de duração. O Quadro 3 dispõe de um resumo das atividades a serem executadas nos 3 encontros.

Quadro 2 - Informações gerais sobre a sequência didática proposta.

Cálculo de áreas de figuras planas irregulares	
Temática	Cálculo de áreas
Público-alvo	Estudantes do 2º ano do Ensino Médio
Duração	3 encontros, cada um com duração de 50 minutos
Objetivo da aprendizagem	Calcular a área de regiões planas irregulares
Habilidade da BNCC	(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes, etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Quadro 3 - Síntese das ações a serem executadas na sequência didática.

Encontro	Síntese das ações
1º	Parte 1 - Apresentação da proposta e motivação Parte 2 - Apresentação dos métodos e exemplos. Parte 3 - Revisão e realização das atividades propostas em grupos.
2º	Resolução de atividades relacionadas ao cálculo de áreas de regiões planas irregulares pelo método do Ponto Médio e pelo método dos Trapézios.
3º	Socialização dos resultados (Avaliação).

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

A seguir, serão dados os detalhes de cada um dos encontros e as orientações ao professor que queira aplicar/adaptar essa sequência com suas turmas de alunos no Ensino Médio.

1° Encontro

A apresentação da proposta e motivação para o estudo do tema pode ser realizada em sala de aula, com o auxílio de projetor multimídia e lousa. Sugere-se que nesta primeira parte do encontro, o professor/mediador possa fazer uma revisão de conceitos e de leis de formação relativas ao cálculo de áreas de regiões planas regulares (com destaque para a do retângulo e a do trapézio). Na sequência, é indicado que alguns problemas usuais (aplicados ou não) que envolvam o cálculo de áreas de regiões regulares sejam solucionados analiticamente na lousa, com a participação dos alunos.

Na sequência, sugere-se que o professor apresente aos alunos algumas regiões planas irregulares contextualizadas com situações reais, objetivando a discussão matemática e de outros aspectos relacionados ao tema. Por exemplo, o conhecimento da área de um município é importante para que se possa determinar a densidade demográfica do local (n° de habitantes/área do município); a determinação da área da seção de um rio, em determinado local que se deseja construir uma ponte, é necessária para que se possa calcular a vazão de água naquele local e, assim, projetar uma estrutura de concreto armado que suporte àqueles esforços relativos à dinâmica da água. Exemplos na localidade onde os alunos estão inseridos também são recomendados nesta etapa.

Após a motivação inicial, podem-se fazer algumas perguntas (adaptáveis) aos alunos como, por exemplo: “Como poderíamos calcular essas áreas (as quais são necessárias à solução dos problemas reais) se elas não representam regiões regulares com áreas calculadas pelas expressões matemáticas aprendidas anteriormente na escola?”; “Será que os conhecimentos adquiridos sobre cálculo de áreas de regiões regulares poderiam ser utilizados para solucionar esses problemas?”; “O estudo de áreas de regiões planas discutidos até aqui são significativos na prática?”; “Quais estratégias vocês sugerem para que esses problemas de áreas possam ser solucionados?”. O professor mediador pode enfatizar aos alunos que, na prática, existem casos como os que foram apresentados, em que não há uma lei de formação específica para o cálculo da área e, assim, estimulá-los a propor soluções para esses problemas. Após ouvir e discutir possíveis sugestões, o mediador deve continuar a apresentação informando que existem outros métodos para o cálculo da área dessas regiões irregulares, de fácil entendimento e que são baseados nas fórmulas de cálculo de áreas que eles já conhecem.

Na segunda parte do 1° Encontro, é projetada a apresentação dos métodos do Ponto Médio e dos Trapézios. As duas regras exigem inicialmente que o aluno conheça a forma geométrica e a expressão para o cálculo de áreas do retângulo e do trapézio. Anteriormente aos cálculos, o professor pode apresentar graficamente as ideias de: referenciar/localizar essa região no plano cartesiano xy;

de modelar o contorno da região usando funções; e de estimar a área irregular pela soma de áreas de retângulos ou de trapézios que a compõem. Assim, sugere-se apresentar os cálculos através de exemplos simples (por exemplo, com um n pequeno ($n = 5$)), antes de generalizar os métodos, como o mostrado na Figura 4. De todo modo, durante a explicação da utilização dos métodos sobre os exemplos, os passos descritos nos Quadros 4 e 5 podem ser adotados, adaptando-se a quantidade n e a linguagem matemática padrão aos conhecimentos prévios dos alunos.

Quadro 4 - Passo-a-passo para a utilização da regra do Ponto Médio.

Passo 1	Referenciar a região no plano xy e determinar os seus limites $x = a$ e $x = b$. Dividir o intervalo [a, b] em 5 subintervalos $[x_{i-1,}x_i]$, com i=1,2,3,4,5 ($n = 5$), calculando o tamanho de cada subintervalo ($\Delta x = \frac{b-a}{n}$);
Passo 2	Marcar as cotas dos pontos das extremidades ($x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\ e\ x_5$) de cada subintervalo em [a, b]; Calcular e marcar os pontos médios (c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5) de cada subintervalo;
Passo 3	Determinar os valores das imagens dos pontos médios ($f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$, $f(c_4)$ e $f(c_5)$) em cada subintervalo: (i) a partir da estimação (caso não se conheça a função que modela o contorno da região) do valor de suas cotas correspondentes no eixo y, levando-se em consideração a escala de medição; (ii) ou a partir do cálculo das imagens dos pontos médios diretamente na função, caso ela seja conhecida;
Passo 4	Demarcar, na figura representativa da região, os cinco retângulos formados sobre ela, com suas bases Δx e alturas ($f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$, $f(c_4)$ e $f(c_5)$);
Passo 5	Calcular a área de cada um dos cinco retângulos. Aproximar a área irregular pela soma das áreas dos 5 retângulos formados.

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

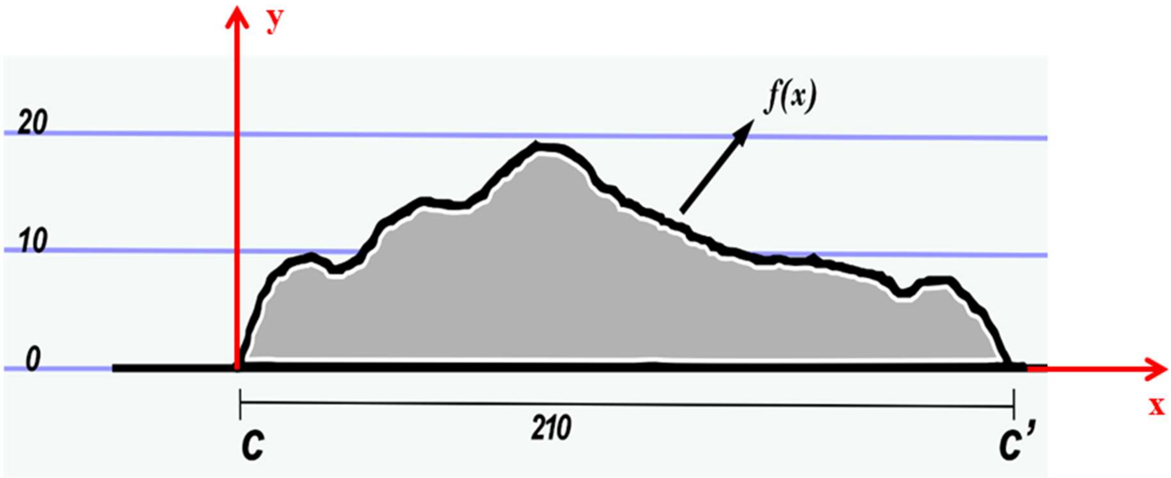
Quadro 5 - Passo a passo para a utilização da regra do Trapézio.

Passo 1	Referenciar a região no plano xy e determinar os seus limites $x = a$ e $x = b$. Dividir o intervalo [a, b] em 5 subintervalos $[x_{i-1,}x_i]$, com i=1,2,3,4,5 ($n = 5$), calculando o tamanho de cada subintervalo ($\Delta x = \frac{b-a}{n}$);
Passo 2	Marcar os pontos das extremidades ($x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\ e\ x_5$) de cada subintervalo em [a, b];
Passo 3	Determinar os valores das imagens das extremidades de casa subintervalo (f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4) e f(x_5)): (i) a partir da estimação (caso não se conheça a função que modela o contorno da região) do valor de suas cotas correspondentes no eixo y, levando-se em consideração a escala de medição; (ii) ou a partir do cálculo das imagens diretamente na função, caso ela seja conhecida;
Passo 4	Demarcar, na figura representativa da região, os cinco trapézios formados sobre ela, cada um com altura Δx e bases $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$, com i=1,2,3, 4, 5;
Passo 5	Calcular a área de cada um dos 5 trapézios. Aproximar a área irregular pela soma das áreas dos 5 trapézios formados.

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

A seguir, um exemplo que pode ser utilizado para a aplicação dos métodos descritos (Figura 4), o qual consiste em estimar a área da região delimitada por uma linha curva (modelada por uma função f(x) de expressão analítica desconhecida) e o segmento de reta $\overline{CC'}$, devidamente referenciados no plano cartesiano xy. O professor mediador pode organizar os dados e cálculos em uma planilha física ou eletrônica para apresentação aos alunos.

Figura 4 - Ilustração de uma região plana irregular referenciada no plano xy, entre f(x) e o segmento $\overline{CC'}$, sugerida para a exemplificação dos métodos.



Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Na última parte do 1° Encontro, é sugerido que o mediador revise os cálculos com os alunos e os questionem se o valor calculado para a área da região plana irregular, usando os dois métodos, pode ser melhorado ao ponto de se aproximá-lo ainda mais do valor exato dessa área. Nesse momento, pode-se apresentar aos alunos como a região da Figura 4 ficaria sobreposta por retângulos e/ou trapézios se fossem escolhidos valores de n cada vez maiores para subdividir o segmento $\overline{CC'}$ e assim discutir possibilidades de aumentar essa quantidade de forma viável e exequível. Ainda nesse encontro, sugere-se que o professor divulgue a atividade para o próximo encontro, que poderá ser realizada em grupo de alunos.

2° Encontro

No 2° encontro, sugere-se a apresentação e início da execução da atividade de cálculo de áreas de regiões irregulares, com os grupos de alunos definidos no 1° Encontro. Durante a apresentação das situações-problema da atividade, o professor pode discutir e orientar os grupos com relação à escolha adequada do referencial ortogonal (com vista a facilitar as medições das cotas x e y nos eixos cartesianos); e à determinação correta dos valores dos parâmetros necessários à utilização dos métodos (Quadros 4 e 5), levando-se em consideração a escala de medição adotada. O aluno poderá fazer a conversão das medidas no papel para o tamanho real da área, utilizando a regra de três simples. É recomendável que o professor confeccione uma tabela para que cada grupo de alunos possa preencher os dados coletados durante os experimentos, para fins de organização e evolução dos cálculos (como sugerido na Figura 5).

Figura 5 - Modelos de tabelas para anotações dos registros experimentais do cálculo de áreas, utilizando a regra do Ponto Médio e a regra dos Trapézios.

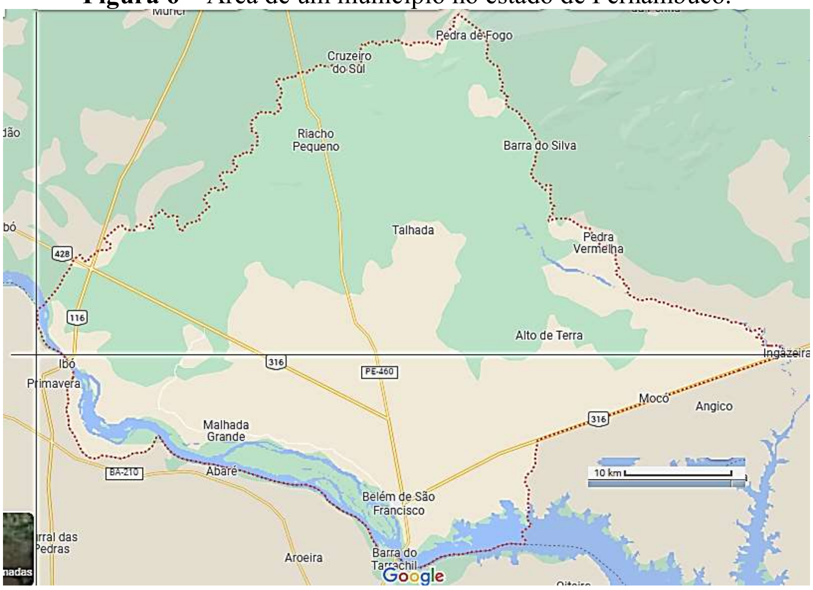
Modelo - regra do Ponto Médio						
Subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$	**Base Δx (cm)**	**Base (km)**	**Ponto médio $c_i = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$**	**Altura $(f(c_i))$ (cm)**	**Altura (km)**	**Área do retângulo em cada subintervalo (km²)**
$[x_0, x_1]$	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
$[x_{n-1}, x_n]$	...	...	...	...	...	...
Área total aproximada (km²)	-	-	-	-	-	Soma das áreas dos retângulos

Modelo - regra dos Trapézios							
Subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$	**Base 1 $f(x_{i-1})$ (cm)**	**Base 1 (km)**	**Base 2 $f(x_i)$ (cm)**	**Base 2 (km)**	**Altura Δx (cm)**	**Altura (km)**	**Área do trapézio em cada subintervalo (km²)**
$[x_0, x_1]$	...	...			...	...	...
...	...	...			...	...	...
$[x_{n-1}, x_n]$	...	...			...	...	...
Área total aproximada (km²)	-	-			-	-	Soma das áreas dos trapézios

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Situação-problema 1. Um município do interior do estado de Pernambuco (Figura 6) tem uma área de aproximadamente 1.831 km² e conta com uma população de mais de 18.321 habitantes, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A cidade é reconhecida como a terra dos primeiros bonecos gigantes, Zé Pereira e Vitalina. Pede-se para calcular a área aproximada do município a partir de sua representação no mapa (Figura 6), usando a regra dos Trapézios (seguindo as orientações disponíveis nos Quadros 5 e 6).

Figura 6 – Área de um município no estado de Pernambuco.



Fonte: Google Maps (2024).

Quadro 6 - Orientações para o cálculo da área da situação-problema 1.

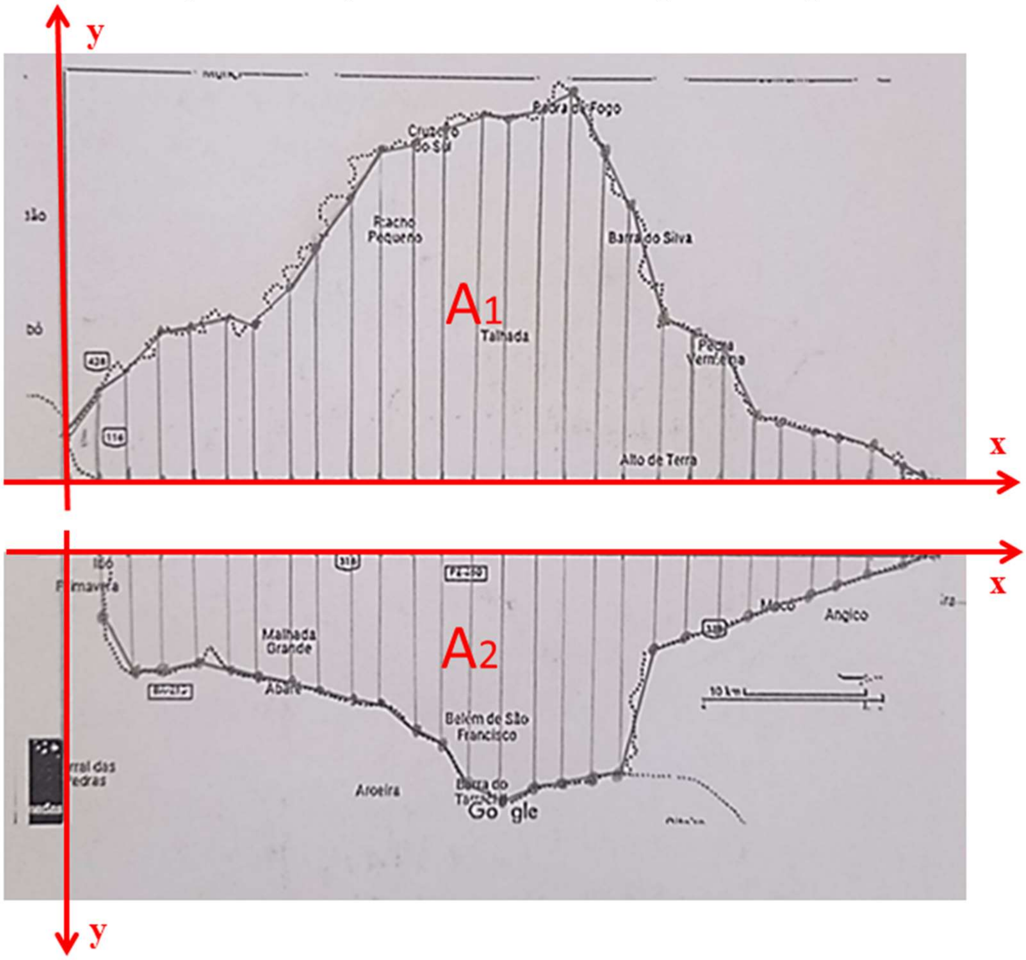
Grupo 1	Calcular a área aproximada do município, utilizando a regra dos Trapézios, com n=5;
Grupo 2	Calcular a área aproximada do município, utilizando a regra dos Trapézios, com n=14;

Grupo 3	Calcular a área aproximada do município, utilizando a regra dos Trapézios, com n=28;
Passo 1	Definir a localização dos eixos perpendiculares x e y;
Passo 2	Seguir o passo-a-passo para a utilização da regra dos Trapézios descrito no Quadro 5;
Passo 3	Organizar os dados coletados usando a Tabela disponível na Figura 5.

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Escolhendo-se os referenciais sugeridos na Figura 7, a área total da região do município pode ser calculada como a soma das áreas A_1 e A_2.

Figura 7 – Região do município referenciada, com a sobreposição de trapézios ($n = 28$).



Arquivos dos autores (2024).

Nessa configuração, por exemplo, usando $n = 28$, é possível estimar a área da região com o valor de aproximadamente 1.821 km^2, um erro relativo de apenas 0,55% para o valor real da área. Como sugerido, também é possível calcular essa área usando menores valores de n e/ou a regra do Ponto Médio (Quadro 4). Escolher um n igual ao usado com o método dos Trapézios é interessante porque os grupos de alunos podem comparar os resultados obtidos usando as duas técnicas. De todo modo, os procedimentos de cálculo realizados por cada grupo para obtenção das áreas com $n = 5, 14$ ou 28 serão socializados e discutidos no 3° Encontro.

Situação-problema 2. Uma cidade do interior de Pernambuco é uma das maiores exportadoras de manga do Brasil. Pede-se para calcular a área aproximada da área cultivada de uma propriedade rural produtora de manga (área em verde, Figura 8), usando-se a regra do Ponto Médio.

Figura 8 - Vista aérea de satélite de uma área rural com produção de manga, localizada em uma cidade do estado de Pernambuco (localização: 8°34'19.0"S 39°15'47.0"W).

Fonte: Google Maps (2024).

Para essa atividade, o professor pode sugerir as ações descritas no Quadro 7.

Quadro 7 - Orientações para o cálculo da área da situação-problema 2.

Grupo 4	Calcular a área aproximada da região de cultivo, utilizando a regra do Ponto Médio, com n=5;
Grupo 5	Calcular a área aproximada da região de cultivo, utilizando a regra do Ponto Médio, com n=14;
Grupo 6	Calcular a área aproximada da região de cultivo, utilizando a regra do Ponto Médio, com n=28;
Passo 1	Definir a localização dos eixos perpendiculares x e y;
Passo 2	Seguir o passo-a-passo para a utilização da regra do Ponto Médio descrito no Quadro 4;
Passo 3	Organizar os dados coletados usando a Tabela disponível na Figura 5.

Fonte: Arquivos dos autores (2024).

Situação-problema 3. Em um município do interior de Pernambuco, existe uma praça que é frequentemente utilizada para o lazer da comunidade local (Figura 9). Pede-se para calcular a área aproximada dessa praça.

Situação-problema 4. Um município localizado no Sertão pernambucano possui um total de 88 ilhas. Uma delas é a Ilha do Cachauí (Figura 10). Nessa ilha (além de um ponto turístico local) se pratica a agricultura familiar e a criação de animais (caprinos, ovinos e bovinos), destinadas ao mercado consumidor local. Pede-se para calcular a área aproximada da ilha.

Situações-problema como a 3 e 4 também podem ser trabalhadas pelo professor mediador, propondo variações no número de subintervalos e/ou da técnica de estimação de áreas.

Figura 9 - Vista aérea de satélite de uma praça em um município de Pernambuco (localização: 8°46'02"S 38°57'18"W).

Fonte: Google Maps (2024).

Figura 10 - Vista aérea de satélite de uma ilha localizada em um município do interior do estado de Pernambuco (localização: 8°43'49"S 39°01'38"W).

Fonte: Google Maps (2024).

3° Encontro

No último encontro, é proposta a socialização dos trabalhos. Cada grupo exibirá os resultados obtidos a partir da apresentação da respectiva situação-problema, dos dados coletados e organizados nas tabelas e dos cálculos realizados para a estimação da área. É importante que o professor acompanhe a apresentação destacando os acertos e discutindo com os alunos possíveis erros de medição. O objetivo é mostrá-los que mesmo seguindo diferentes métodos para obtenção da solução, os resultados devem estar próximos uns dos outros, e que valores de área divergentes podem estar associados à execução da técnica numérica escolhida, das ferramentas de medição e até mesmo das ações de medição do observador.

Salienta-se também que o professor, como mediador do processo de aprendizagem, pode propor o estudo de outras regiões irregulares e/ou outras situações-problema (representativas do ambiente o qual o aluno está inserido).

Considerações finais

Neste estudo, a temática do cálculo de áreas de regiões planas na BNCC foi mostrada e discutida em detalhes e retornou a sua importância para a formação do aluno no Nível Médio. Em adição, verificou-se que o tema se mostra atual na área de pesquisa em Ensino de Matemática, e tem sido enfatizado na literatura com propostas metodológicas alternativas para a melhoria do ensino de Matemática.

Todos esses conceitos apresentados e discutidos foram essenciais para que fosse possível a apresentação de técnicas numéricas acessíveis para o cálculo aproximado de áreas de regiões planas irregulares, bem conhecidas no Ensino Superior, mas pouco difundidas na Educação Básica, mesmo com o potencial de usabilidade demonstrado. Assim, conceitos básicos das regras do Ponto Médio e dos Trapézios foram adaptados ao nível escolar trabalhado, para o desenvolvimento de uma proposta de sequência didática interdisciplinar. A proposta envolveu a solução de problemas de apelo local e de ordem prática, a partir do cálculo de áreas territoriais (município, praça, propriedade rural e ilha), com linguagem acessível ao público-alvo, e auxílio da ferramenta gratuita Google Maps.

Com base no que foi desenvolvido até aqui, planeja-se que a continuidade do trabalho envolva a execução de um estudo de caso com os alunos de escolas públicas locais, aplicando a sequência didática em sala de aula, e avaliando os resultados práticos da pesquisa com base na teoria apresentada. Espera-se que este trabalho de pesquisa possa servir como material didático de consulta para os professores de Matemática que desejam aplicar e ressignificar conceitos de cálculo de áreas para a solução de problemas reais.

Recebido em: 10/01/2024
Aprovado em: 27/01/2025

Referências

ARDIYANTO, W. S.; DWINUGROHO, T. B.; ARINI, H. M. Area measurement of irregular shaped object using multivariate image analysis. In: INTERNATIONAL SEMINAR & NATIONAL SYMPOSIUM, 2012, Yogyakart, Indonésia. **Proceedings of the International Seminar & National Symposium - Global Competitiveness Through Research Supporting Commercial Industry**. Trabalho II-134. Yogyakart: University of Technology Yogyakarta. Disponível em: http://eprints.uty.ac.id/3412/1/2012%20Int%27l%20Seminar%20UTY.pdf. Acesso em: 04 jan. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 03 Jan. 2024.

BRITO, T. C. **A horta escolar como recurso didático para contextualização da educação no semiárido: vivência pedagógica na Escola do Campo Pio X - Sumé**. 2021. 67 f. Monografia (Especialização em Educação Contextualizada para a Convivência com o Semiárido). Centro de

Desenvolvimento Sustentável do Semiárido, Universidade Federal de Campina Grande, Sumé, Paraíba, 2021.

CARDOSO, I. C. S. **Centroides, Teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução: uma proposta para futuros professores do Ensino Médio**. 2020. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.

CARDOSO, R. T. **O ensino de medida de área por atividade**. 2019. 356 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

CORDEIRO NETO, A. A. Cálculo Integral para o Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v.7, n.1, p. 133-156, 2019.

COSTA, M. **Lei do Georreferenciamento: o que é e para que serve?** MK Avaliações Imobiliárias. 2018. Disponível em: https://mkavaliacoesimobiliarias.com.br/lei-do-georreferenciamento-o-que-e-e-para-que-serve/. Acesso em: 03 Jan. 2024.

COSTA, A. P.; BATISTA, R.; MORAIS, M. D. Área de figuras planas no 8º ano do ensino fundamental do Brasil: um estudo sob a ótica da teoria antropológica do didático. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n. 2, p. 150-158, 2019.

DA SILVA, H. L. et al. Método prático para cálculo de área de um polígono convexo tendo conhecimento dos seus vértices. **Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 1-4, 2024.

DE QUEIROZ, J. C. S.; BORGES, G. D. A geometria plana nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. **Conjecturas**, v. 22, n. 12, p. 886-902, 2022.

DOJAS NETO, F. **Uma proposta didática para o ensino de áreas e volumes**. 2023. 47f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2023.

FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B, Cálculo A. **Funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

LEE, D. J.; XU, X.; EIFERT, J.; ZHAN, P. Area and volume measurements of objects with irregular shapes using multiple silhouettes. **Optical Engineering**, v. 45, n. 2, 027202(1-10), 2006.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, v.10, p. 37-45, 2007.

LINTZ, R. G. O conceito de área de figuras planas na geometria grega. **Revista Brasileira de História da Matemática**, p. 35, 2020.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas**. 2011. 220 f. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

OLIVEIRA, A. C.; *et al.* Matemática para a Cidadania: calculando perímetro e área em situações do cotidiano. **Revista Extensão e Cidadania**, v. 8, n. 13, p. 211-227, 2020.

PEREIRA, G. M. **Análise comparativa de técnicas para estimativa da infiltração de água no solo em irrigação por superfície**. 2007. 62 f. Dissertação (Mestrado em Agronomia/Solos e Nutrição de Plantas). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

PUHL, C. S; DIAS, T. M. Desmatamento no interior de Bom Princípio: a área desmatada na última década. **Scientia Cum Industria**, v. 5, n.3, p. 183-185, 2017.

ROCHA, T. O; SILVA, J. N. D. O cálculo de perímetro e de área de figuras planas: dificuldades encontradas pelos alunos da EJA. **Com a palavra o Professor**, v.5, n. 11, p. 71-86, 2020.

SANTOS, J. V. R. **Comparação entre métodos de cálculo de vazão de cheia para bacias urbanizadas**. 2021. 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Ambiental). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

SANTOS, M. R.; SANTOS, M. C. O conceito de área de figuras geométricas planas no livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 6, n. 2, p. 04-24, 2015.

SALMONA, K. B. C.; *et al*. Estudo comparativo entre as técnicas manual e automática de demarcação de borda para avaliação de área de úlceras por pressão. **Enfermagem em Foco**, p. 42-46, 2016.

SILVA, R. R. P. **Uso do modelo RiverFlow 2D para estudo de transporte de sedimentos e assoreamento em reservatórios - Caso da UHE Aimorés**. Monografia (Graduação em Engenharia Civil). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TEIXEIRA, V. G.; COUTINHO, F.; GOMES, A. S. Principais métodos de caracterização da porosidade de resinas à base de divinilbenzeno. **Química nova**, v. 24, p. 808-818, 2001.

THIEGHI, L. T. Utilização do aplicativo “Waze” no cálculo de distância através da integral definida. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, 2021.

VASCONCELOS, V. V. *et al*. Áreas da seção transversal inundável e declividade em relação ao curso d’água mais próximo como extensões do modelo hand: mapeamento de susceptibilidade à inundação na região de Lucas do Rio Verde, Mato Grosso, Brasil/floodable cross-sectional area. **Revista GeoAmazônia**, v. 5, n. 9, p. 3-27, 2017.

VERONEZ, W. M. **Experimentos sobre absorção e emissão de radiação térmica e visível com adaptação do Cubo de Leslie**. 2017. 138 f. Dissertação (Ensino de Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2017.