

Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio do Apprenti Géomètre 2 em situação de medição de área

Teaching and learning area as a geometric magnitude: a study using Apprenti Géomètre 2 in an area measurement situation

Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva¹

José Cícero dos Santos²

Marilene Rosa dos Santos³

RESUMO

O presente estudo teve como objetivo investigar o tratamento dado por estudantes do 6º ano do ensino fundamental a uma situação de medição de área por meio do software de geometria Apprenti Géomètre 2 (AG2). Como suporte teórico, utilizamos a abordagem de área como grandeza geométrica proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989), bem como os estudos das situações que dão sentido à área como grandeza, propostos por Baltar (1996) e Ferreira (2018). Os procedimentos metodológicos utilizam alguns elementos da Engenharia Didática de primeira geração. O dispositivo experimental foi estruturado em duas etapas. Na primeira, os participantes da pesquisa aprenderam a utilizar o AG2. Na segunda etapa, resolveram, por meio desse software, a tarefa relacionada à situação de medição de área. Como resultados, identificamos, a partir das análises dos protocolos das seis duplas participantes da pesquisa, a predominância do aspecto numérico da área, prevalecendo independentemente da utilização do referido software. Para muitos dos sujeitos da pesquisa, o número (medida da área) parece ser suficiente para determinar as áreas das figuras, nesse tipo de situação, indicando assim indícios de concepção numérica de área.

Palavras-chave: Área; Apprenti Géomètre 2; Grandeza Geométrica; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

¹ Doutor em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC-UFPE). Professor Adjunto do Colegiado de Matemática da Universidade de Pernambuco (UPE). Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Amaro Maltês de Farias, 201, Centro, Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil, CEP: 558000-000. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8950-3019>. E-mail: anderson.rodriguessilva@upe.br.

² Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN). Professor Adjunto da Universidade de Pernambuco (UPE), Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Amaro Maltês de Farias, 201, Centro, Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil, CEP: 558000-000. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0874-8772>. E-mail: jose.csantos@upe.br.

³ Doutora em Ensino das Ciências e Matemática (UFRPE). Professor Adjunto da Universidade de Pernambuco (UPE), Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Amaro Maltês de Farias, 201, Centro, Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil, CEP: 558000-000. ORCID: <http://orcid.org/0000-0000-0000-0000>. E-mail: autor3@mail.com.

The present study aimed to investigate the approach taken by 6th-grade elementary students to a situation involving the measurement of area using the geometry software Apprenti Géomètre 2 (AG2). As theoretical support, we use the approach of area as a geometric magnitude proposed by Douady and Perrin-Glorian (1989), as well as studies on situations that give meaning to area as a magnitude, proposed by Baltar (1996) and Ferreira (2018). The methodological procedures use some elements of first-generation Didactic Engineering. The experimental setup was structured in two stages. In the first stage, the research participants learned to use AG2. In the second stage, they solved, using this software, the task related to the area measurement situation. As results, we identified, from the analysis of the protocols of the six pairs of participants in the research, the predominance of the numerical aspect of the area, prevailing regardless of the use of the aforementioned software. For many of the research subjects, the number (area measurement) seems to be sufficient to determine the areas of the figures in this type of situation, thus indicating signs of a numerical conception of area.

Keywords: Area; Apprenti Géomètre 2; Geometric Magnitude; Mathematics Education.

Introdução

Pesquisas ao longo dos anos têm apontado diferentes obstáculos e dificuldades relacionados ao conceito de área de figuras planas entre estudantes brasileiros, tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do ensino fundamental (Ferreira, 2010; Dias Henriques e Melchhiades da Silva, 2014; Silva, 2016; Silva e Bellemain, 2017; Silva *et al.*, 2022; Silva, Silva e Gomes, 2023). Entre as dificuldades, podemos destacar confusões entre área e perímetro, como considerar que figuras com áreas iguais têm necessariamente perímetros iguais, além do uso inadequado de fórmulas, como calcular o produto dos comprimentos dos lados de um paralelogramo não retângulo para determinar sua área.

De acordo com as pesquisadoras francesas Douady e Perrin-Glorian (1989), alguns estudantes consideram que a área está tão intimamente ligada à figura que não conseguem dissociá-la de outras características desta. Nessas condições, para esses estudantes, parece impossível modificar uma figura mantendo sua área inalterada. Ou seja, qualquer modificação na figura necessariamente alteraria sua área, bem como todas as outras características da figura, como seu perímetro, por exemplo.

Diante dessas dificuldades relacionadas ao conceito de área de figuras planas, Douady e Perrin-Glorian (1989), interpretam que a aprendizagem dos conceitos matemáticos está associada à compreensão da inter-relação entre as diferentes representações de um mesmo conceito e o devir entre elas quando se faz necessário a associação de conceitos comuns a duas ou mais representações, que as autoras chamam

de quadros⁴. No caso do trabalho com as grandezas, o aluno pode recorrer aos quadros geométrico, numérico e o das grandezas. Segundo Santos (2021) a mudança de quadro é um meio de obter formulações diferentes de um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na formulação inicial de um problema.

Para tentar contribuir com a superação dessas dificuldades que já vem sendo apontada por pesquisas nacionais e internacionais (Silva, 2016; Silva e Bellemain, 2017; Ávila e García, 2020; Silva *et al.*, 2022; Samsudin e Nugraha, 2023), algo que pode ser caracterizado como obstáculo epistemológico na aprendizagem dos estudantes, as pesquisas desenvolvidas por Baltar (1996) e Ferreira (2010, 2018), ancoradas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), propõem um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área: comparação de área, medição de área, conversão de unidades e produção de superfície⁵.

Essas situações, conforme Ferreira (2010), proporcionam condições para que, na abordagem do conceito de área, seja possível explorar a diferença entre a área de uma superfície e sua forma, considerando que duas superfícies de formas diferentes podem ter a mesma área. Há também a distinção entre área e quantidade, em que uma mesma superfície pode corresponder a diferentes números, dependendo das unidades de medida escolhidas, sem, contudo, modificar sua área.

Nesta pesquisa, sentimos a necessidade de realizar um estudo voltado ao uso de software de geometria que, por meio de seu dinamismo, permitisse aos estudantes experimentar diferentes estratégias de resolução de tarefas sobre área. Assim, escolhemos o software *Apprenti Géomètre 2*, utilizado nas pesquisas do *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (CREM, 2007)⁶ em um estudo com estudantes da comunidade francófona na Bélgica, que apresentou um diferencial na aprendizagem deles na resolução de tarefas de comparação e medição de área de figuras planas. Pretendíamos verificar a potencialidade desse software nas resoluções de tarefas sobre área no contexto brasileiro.

⁴ Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 389), um quadro é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento, a esses objetos e relações.

⁵ Essas situações serão explicadas posteriormente na seção de revisão de literatura.

⁶ Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) é um grupo de pesquisa responsável pelo projeto de elaboração do *Apprenti Géomètre* nas versões 1 e 2.

Diante desse cenário, este artigo teve como objetivo investigar o tratamento dado por estudantes do 6º ano do ensino fundamental a uma tarefa representante da classe de situação de medição de área, no software de geometria *Apprenti Géomètre 2*. Buscamos então, com a realização deste estudo, caracterizar os procedimentos de resolução de uma tarefa que envolve a situação de medição de área por estudantes do 6º ano do ensino fundamental, utilizando para isso o *Apprenti Géomètre 2* na busca de verificar a distinção entre área e sua medida.

Estudos Didático do Conceito de área como uma grandeza

Nesta pesquisa, abordamos área como grandeza geométrica, ancorados nos estudos desenvolvidos por Douady e Perrin-Glorian (1989). Na década de 1980, a partir da análise da avaliação escolar do desempenho de estudantes franceses em um nível equivalente ao 4º e 5º anos do ensino fundamental no Brasil, essas pesquisadoras evidenciaram erros e entraves na resolução de problemas matemáticos sobre área de figuras planas, dentre os quais se destacaram:

- a capacidade de expressar a área de uma figura usando uma determinada unidade depende dos formatos da figura e da superfície unitária, ou seja, da capacidade de ladrilhar efetivamente a figura com uma quantidade finita de exemplares da superfície unitária. Portanto, surge a dificuldade em expressar a área de um triângulo em centímetros quadrados devido à impossibilidade de cobrir efetivamente um triângulo com uma quantidade finita de quadrados de lado de um centímetro;
- a área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície;
- se o perímetro de uma superfície se altera sua área também (e reciprocamente); se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área; estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas: por exemplo, produto de duas “dimensões” para obter a área de um paralelogramo ou o produto das três “dimensões” para obter a área de um triângulo (Douady e Perrin-Glorian, 1989, p. 394, tradução nossa).

No Brasil, estudos realizados em diversas etapas da educação básica também identificaram erros e dificuldades semelhantes aos apresentados por Douady e Perrin-Glorian (1989). Pesquisas conduzidas por Silva (2016), Silva e Bellemain (2017), Santos (2021), Silva *et al.* (2022) e Silva, Silva e Gomes (2023) revelam que estudantes nessas etapas apresentam confusões entre área e perímetro, têm dificuldade em compreender que figuras diferentes podem ter a mesma área e se confundem no uso das unidades de medida, expressando a área de uma figura em cm ao invés de cm^2 , por exemplo.

Além disso, não percebem que, ao decompor um retângulo e recompor uma nova figura por justaposição com as partes decompostas, a área da nova figura é preservada, e não compreendem que a equidecomposição⁷ conserva a área. Os estudantes também tendem a acreditar que duas figuras com a mesma quantidade de lados possuem a mesma área, ou que duas figuras com áreas iguais são necessariamente congruentes.

As pesquisas supracitadas evidenciam o que já havia sido identificado nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) que o modelo explicativo para tais erros e dificuldades está atrelado na organização das concepções dos alunos em dois polos – as concepções geométricas e as concepções numéricas- as quais podem ser exemplificadas da seguinte maneira:

As concepções geométricas se caracterizam por um amálgama entre a figura e a área, isto significa dizer que para os sujeitos que mobilizam uma concepção geométrica é como se a palavra área remetesse à própria figura, e não a um atributo da mesma. No outro extremo, estão as concepções numéricas, que focam exclusivamente o aspecto do cálculo. É o caso de respostas a problemas de cálculo de área, nas quais nenhuma unidade é mencionada ou utilizam-se unidades inadequadas (Ferreira e Bellemain, 2013, p. 3).

Douady e Perrin-Glorian (1989) destacam que os estudantes utilizam, em diferentes momentos, uma concepção geométrica e outra numérica de área, e às vezes ambas simultaneamente. No entanto, eles falham em estabelecer conexões adequadas entre os aspectos geométricos e numéricos ao resolver problemas de área, o que acaba gerando ou intensificando as dificuldades na aprendizagem desse conceito.

Essas pesquisadoras indicam em seu estudo que um dos fatores que reforçava essas concepções estava relacionado ao modelo de ensino adotado nos níveis educacionais elementares na França da época. Esse modelo abordava a área de uma figura inicialmente por meio do ladrilhamento de superfícies, passando rapidamente pelo processo de ladrilhamento e contagem dos quadrados para determinar a área de superfícies quadriculáveis. Em seguida, para retângulos ou quadrados, buscavam-se métodos mais eficientes de contagem. Posteriormente, introduziam-se as unidades convencionais com seus múltiplos e submúltiplos e, dependendo do caso, antes ou depois disso, estabeleciam-se as fórmulas de áreas dos retângulos com base nos comprimentos dos lados dessa figura.

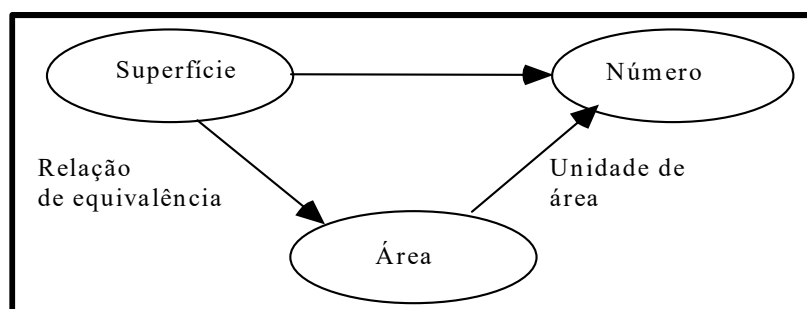
⁷ se refere à decomposição ou divisão de uma figura geométrica em partes que podem ser rearranjadas ou reagrupadas para formar outra figura geométrica, mantendo a mesma área (e, em alguns casos, o mesmo perímetro).

Com essa descoberta, Douady e Perrin-Glorian (1989), propõem que no ensino e na aprendizagem do conceito de área devem-se considerar três quadros: o geométrico, o numérico e o das grandezas.

Esses quadros são explicados e discutido por Silva e Bellemain (2017) que os descreve da seguinte maneira: no quadro geométrico, estão as superfícies planas, consideradas como modelos matemáticos de faces de objetos do mundo físico. São objetos desse quadro: triângulos, quadriláteros, círculos, semicírculos, figuras de contornos irregulares, etc. Nesse modelo, a área faz parte do quadro das grandezas e é caracterizada como classe de equivalência de superfícies de mesma área. O quadro numérico é composto pelas medidas, as quais são números reais não negativos (3 , $\frac{1}{7}$, $\sqrt{5}$, etc.). Expressões compostas de um número acompanhado de uma unidade de área são maneiras de representar grandezas ($\frac{1}{7} \text{ m}^2$, $\sqrt{5} \text{ km}^2$, etc.).

A partir da experimentação de uma engenharia didática, Douady e Perrin-Glorian (1989) evidenciam que a distinção e articulação entre os três quadros explicitados anteriormente contribuem para a construção do conceito de área como uma grandeza. As relações entre os quadros geométrico, numérico e o quadro das grandezas podem ser, de acordo com Bellemain e Lima (2002), modelizadas conforme a Figura 1:

Figura 1 – Relações entre os quadros.



Fonte: BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 41.

Para esses autores - as superfícies planas são objetos do quadro geométrico; - as áreas são objetos do quadro das grandezas; - as medidas de áreas - números reais positivos são objetos do quadro numérico; - a relação de equivalência “ter mesma área” (objeto que permite passar do quadro geométrico ao das grandezas); - as unidades de área (objeto que permite passar do quadro das grandezas ao das medidas).

A partir dos estudos de Douady e Perrin-Glorian, em sua pesquisa, Baltar (1996) propõe três classes de situações que dão sentido a área como grandeza: comparação de

área, medida de área e produção de superfície. Essas situações são explicadas por Silva e Bellemain (2017) da seguinte maneira:

Nas situações de comparação trata-se em primeiro plano de decidir se duas figuras pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (ou seja, se têm mesma área) ou de estabelecer uma ordem entre as áreas de duas ou mais figuras. **Nas situações de medida**, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade de área e, nesse caso, o que está em foco é a passagem da grandeza ao número mediante a escolha de uma unidade. **As situações de produção** são aquelas nas quais se solicita que sejam desenhadas ou descritas figuras que respeitem determinadas condições: por exemplo, traçar no papel quadriculado uma figura de área 20 cm^2 ; dada uma figura K, desenhar uma figura H, diferente de K, com mesma área; ou uma figura J com perímetro igual ao de K etc. (Silva e Bellemain, 2017).

Essas situações são ampliadas por Ferreira (2010) para mais uma classe a de mudança de unidades, que consiste em realizar a medição de uma figura com determinada unidade de área que podemos chamar de F e solicita-se que essa mesma figura seja realizada a medição com outra unidade de área que podemos chamar de T. A área da figura permanecerá a mesma, mas a medida da área que é um número, poderá variar a depender da unidade de área escolhida. Neste texto, para evitar confusões de interpretação, a situação de medida será denominada de situação de medição e, a de mudança de unidades, chamada de conversão de unidades (Ferreira, 2018)⁸.

Compreendemos assim como Ferreira (2018) que diferenciar as situações de medição das situações de conversão de unidade se justifica, considerando que devemos dar um tratamento que privilegie a articulação entre os três quadros, com a presença das superfícies, antecedendo a introdução das unidades de medida convencionais, para que o estudante compreenda a construção do par (n° , unidade de medida) independente das transformações meramente operatórias.

Para a realização deste estudo foi desenvolvida uma tarefa representante da classe de situação de medição de área, privilegiando a articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico, cujo objetivo é observar a ideia de mesma área para os estudantes do 6º ano do ensino fundamental e analisar se eles mobilizam apenas uma concepção numérica da área, ou seja, se ao invés de considerar a área como um par número + unidade

⁸A medida é o número obtido ao realizarmos a medição da área de uma figura, considerando uma unidade de área, que pode ser convencional ou não convencional. Já o termo "mudança de unidades" é tratado como "conversão de unidades" para indicar especificamente o processo de transformação de uma unidade para outra, como de cm^2 para m^2 , por exemplo. Essa distinção terminológica visa clarificar o entendimento dos conceitos, uma vez que ambos os processos — medir e converter unidades — fazem parte do estudo da área de figuras planas, mas representam ações e significados diferentes dentro do aprendizado matemático.

de medida, os sujeitos comparam apenas números, se equivocando quanto a área das figuras.

A tarefa citada foi elaborada em um software de geometria denominado de *Apprenti Géomètre 2*, escolhido pelo fato de oferecer condições para que os estudantes pudessem mobilizar diferentes estratégias de resolução. Ele já fora utilizado em pesquisas na Bélgica (CREM, 2005, 2007), no Brasil (Silva, 2016; Silva e Bellemain, 2017; Silva *et al.*, 2022) e mostrou-se potencialmente lúdico, acessível e de fácil manipulação para os professores e alunos da educação básica.

Esse software foi projetado e desenvolvido pelo “*Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques* (CREM) e possui ferramentas que permitem a decomposição, recomposição, duplicação, rotação, translação e reflexão de figuras desenhadas em sua interface. Ele difere dos demais software de geometria, como o Geogebra e o Cabri, por exemplo, por ter sido construído com o objetivo de serem trabalhadas por meio dele as grandezas área e perímetro.

Procedimentos Metodológicos

Visando atender ao objetivo deste estudo de investigar o tratamento dado por alunos do 6º ano do ensino fundamental a uma tarefa representante da classe de situação de medição de área, no software de geometria *Apprenti Géomètre 2*, realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo. Esse tipo de pesquisa busca entender o “como” e o “porquê” das ações e decisões humanas, capturando a complexidade das situações reais e dando voz às experiências e significados que os participantes atribuem aos seus contextos (Minayo, 2001), isto é, a pesquisa qualitativa se concentra na coleta de dados que são descritivos e interpretativos. Nossa metodologia é baseada em elementos da Engenharia Didática⁹ (Artigue, 1996). A revisão de literatura apresentada na seção anterior deu suporte à elaboração e à análise a priori da tarefa envolvendo a situação de medição de área. A estrutura da experimentação, as escolhas didáticas feitas e sua justificativa são apresentadas a seguir. Na análise a posteriori, os procedimentos de resolução utilizados pelos alunos são confrontados com o que foi antecipado na análise a priori, destacando se persiste a concepção numérica nas respostas dadas.

⁹ A engenharia didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (Artigue, 1996, p. 196).

Para realizar esta nossa investigação optamos por escolher uma escola da rede pública municipal localizada na Mata Norte do Estado de Pernambuco, pelo fato de termos a possibilidade de viabilizar espaço físico, recursos e materiais necessários para aplicação da pesquisa.

Decidimos aplicar a pesquisa no 6º ano do Ensino Fundamental, pois este ano marca o início da segunda fase do ensino fundamental, denominada de fundamental II, na qual se espera que os estudantes tenham sistematizado competências relacionadas à área de figuras planas nos anos anteriores. Participaram deste estudo 12 estudantes, organizados em duplas no laboratório de informática da escola, que foi o campo de pesquisa.

Nosso experimento, denominado de dispositivo central, foi organizado em duas etapas, a primeira consistiu em oferecer aos sujeitos participantes da pesquisa um conjunto de tarefas voltadas a exploração das ferramentas e menus do *Apprenti Géomètre 2*, mas que não estavam relacionadas a área de figuras planas e, a segunda, fora entregue a tarefa voltada a situação de medição de área para serem respondida por meio desse software.

As duplas de estudantes receberam a referida tarefa impressa para que pudessem responder às perguntas após utilizarem o software *Apprenti Géomètre 2* nas resoluções. A tarefa também estava predefinida nas telas dos computadores; eles precisavam apenas dar um duplo clique com o botão do mouse e abrir o arquivo com o título "Tarefa figure_1. Fag". O ambiente de trabalho de todos os computadores das duplas foi gravado por meio do software *aTube Catcher*, para que pudéssemos compreender com clareza os procedimentos utilizados no software e verificar se ele contribuiu na resolução da tarefa de medição de área. A participação desses estudantes foi autorizada pelos pais e pela escola através da assinatura de um termo enviado a eles pelos pesquisadores. A seguir, apresentamos a análise a priori e a posteriori da tarefa de medição de área.

Análise a priori da tarefa de medição de área

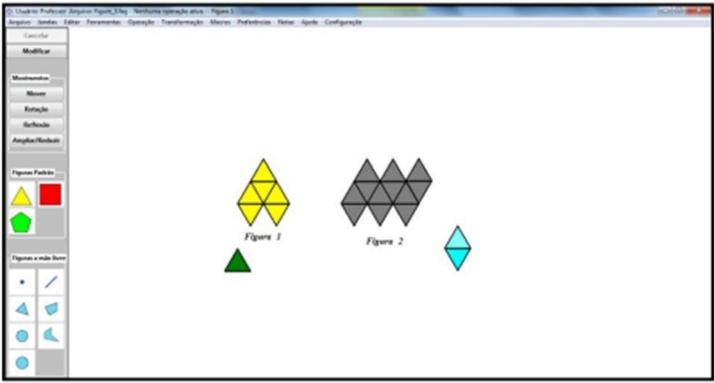
Comando da tarefa apresentada na ficha entregue as duplas:


Abra o arquivo “*Tarefa Figure_3.fag*” que está na tela do seu computador, em seguida, clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br. e clicar em OK.


A seguir, na Figura 2, apresentamos a referida tarefa aplicada aos estudantes do 6º ano:

Figura 2 – Situação de Medição de Área.

3- Observe as figuras 1 e 2 desenhadas abaixo:



Vamos chamar de “A”, a unidade de medida definida pelo triângulo 

Vamos chamar de “B”, a unidade de medida definida pelo losango 

Qual a área da figura 1 usando “A” como unidade de medida? _____

Qual a área da figura 2 usando “B” como unidade de medida? _____

Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área? _____

Justifique como você pensou: _____

Fonte: Adaptado de SILVA, 2016, p. 200

Essa tarefa é representante da classe de situação de medição de área, permitindo a articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico. De acordo com Bellemain e Lima (2002), nessas situações, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade.

Essa tarefa tem como objetivo saber qual a ideia de mesma área que os estudantes mobilizam, porém está em jogo em primeiro plano o ladrilhamento efetivo e a

importância da necessidade de se ter o par número + unidade de medida para expressar as áreas das *figuras*¹⁰ 1 e 2. Assim como Ferreira (2010) consideramos que devemos dar um tratamento que privilegie a articulação entre os três quadros, com a presença das figuras, antecedendo a introdução das unidades de medidas convencionais, para que o estudante compreenda a construção do par (número, unidade de medida) independente de transformações meramente operatórias presentes em muitas tarefas nos livros didáticos.

Os estudantes poderão colocar como resposta correta nessa tarefa que serão necessários seis triângulos iguais ao verde (6A) para ladrilhar efetivamente a *figura 1* e 6 losangos iguais ao azul (6B) para ladrilhar a *figura 2*. Assim temos que a área da *figura 1* são seis triângulos e área da *figura 2* são seis losangos.

Com relação às *figuras 1* e *2* terem as mesmas áreas, terceiro item da tarefa, a resposta correta esperada é que as figuras não têm mesma área. Para responder corretamente, o aluno precisa distinguir área e número (medida da área). Nesse caso, a quantidade de ladrilhos verdes (triangulares) necessária para recobrir a *figura 1* é igual à quantidade de ladrilhos azuis (em forma de losango) necessárias para recobrir a *figura 2*, mas as áreas das figuras não são iguais.

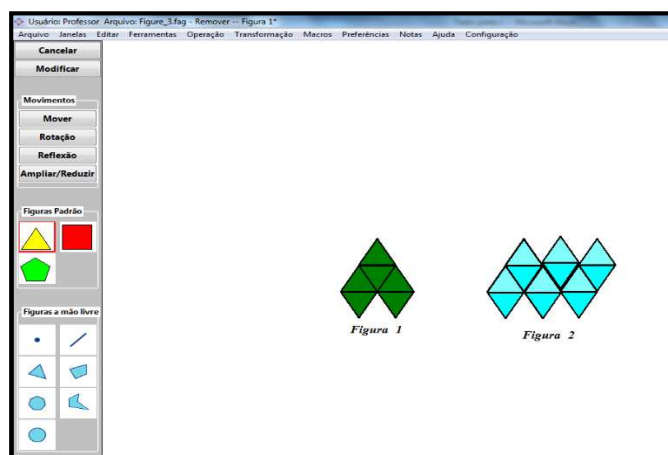
Essa tarefa permite verificar se os estudantes mobilizam apenas uma concepção numérica da área (Douady e Perrin-Glorian, 1989). Ou seja, se ao invés de considerar a área como sendo o par número e unidade de medida, se os sujeitos compararem apenas os números, poderão então responder que as áreas das figuras são iguais porque ambas medem 6, desconsiderando que as unidades de área utilizadas são diferentes.

Os estudantes poderão apenas observar as unidades A e B e contar quantas figuras iguais à unidade A definida por um triângulo cabem na *figura 1*, e quantas figuras iguais a B definida por um losango cabem na *figura 2* e, então, estabelecer a área de ambas ou utilizar ferramenta “Mover” do AG2, deslizar o triângulo verde denominado de A sobre a *figura 1*, aplicar também uma “Rotação” ou “Reflexão” para encaixá-lo perfeitamente e assim efetuar a contagem, ou mesmo duplicar as unidades A e B, por meio da ferramenta “Duplicar” do menu “Operação” quantas vezes forem necessárias para então efetivar a ladrilhagem das *figuras 1* e *2*, sendo necessário aplicação dos movimentos de translação (mover), rotação ou reflexão aos triângulos duplicados para ladrilhar a *figura 1*.

¹⁰ Ao nos referirmos às figuras 1 e 2, que estão dentro da figura 2 do texto (tarefa de medição de área), utilizaremos o itálico para evitar confusões de interpretação com as figuras que aparecem ao longo do texto e não fazem parte dessa tarefa. Exemplo de como ficarão grafadas: *figura 1* e *figura 2*.

Se os estudantes preferirem, poderão utilizar nessa ladrilhagem os triângulos equiláteros do Jogo de Base: “Triângulos” do menu “Figuras Padrão”, reproduzindo-os na tela do software, quantos forem necessários para ladrilhar e, em seguida, efetuar a contagem. Esse procedimento não poderá acontecer com o losango visto que esse menu não contempla esse polígono conforme apresentado na Figura 3:

Figura 3 – Procedimento de ladrilhamento no Apprenti Géomètre 2.



Fonte: arquivo da pesquisa

A imagem acima apresenta as *figuras 1 e 2* ladrilhadas após procedimentos de duplicação e sobreposição das suas respectivas unidades de medição. Dentre as ferramentas e menus que podem ser mobilizados pelos estudantes para realizarem essa tarefa, destacamos os seguintes: as ferramentas que permitem as transformações isoméricas do plano do menu “Movimentos” (mover, rotação e reflexão), do menu “Operação” a ferramenta duplicar, ou a opção triângulos equiláteros do Menu Figuras Padrão e sub menu Jogo de Base: triângulo, assim os alunos precisarão ter conhecimento sobre a funcionalidade de cada uma dessas ferramentas e menus para responderem esta tarefa por meio do *Apprenti Géomètre 2*. Esses menus e ferramentas foram trabalhados na tarefa de complementação de figuras da fase de familiarização.

Análise a posteriori da tarefa

As duplas foram denominadas da seguinte maneira: Dupla 1- D1, Dupla 2- D2, as demais, seguem essa mesma estrutura (D3, D4, D5 e D6). O objetivo dessa atividade era

saber qual é a ideia de mesma área que os alunos mobilizariam, ou ainda se para eles o número parece ser suficiente na determinação das áreas das figuras.

Todas as duplas conseguiram medir as áreas das *figuras 1* e *2* da tarefa de acordo com suas respectivas unidades, a dificuldade se apresentou no item C, quando a partir da igualdade de valor numérico as duplas D1, D2, D3, D4 estabeleceram a igualdade das áreas e que podem ser caracterizados como indícios de concepções numéricas de área.

Como resposta a essa tarefa, as duplas D2, D3, D5 e D4 colocaram que a área da *figura 1* é 6 e a área da *figura 2* também é 6. Elas responderam no terceiro item que essas figuras tinham as mesmas áreas porque contaram quantos triângulos cabiam na *figura 1* e quantos losangos cabiam na *figura 2*, e o resultado foi o mesmo número.

Como previmos, esses alunos não levaram em conta o par número-unidade de medida para expressar as áreas das *figuras 1* e *2*. Neste caso, para essas duplas o número parece ser suficiente para determinar as áreas das figuras, sendo o aspecto numérico um fator determinante para expressar as áreas. O extrato de protocolo da Figura 4 a seguir, apresenta a resposta final da dupla D2:

Figura 4 – Extrato do protocolo da D2

Qual a área da figura 1 usando "A" como unidade de medida?	6
Qual a área da figura 2 usando "B" como unidade de medida?	6
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área?	Sim
Justifique como você pensou para responder essa tarefa:	
Porque nós contamos os triângulos e losangos e deu a mesma coisa quantidade	

Fonte: arquivo da pesquisa

Essa dupla utilizou um procedimento de contagem para determinar quantos triângulos idênticos ao "A" caberiam na *figura 1* e quantos losangos idênticos ao "B" caberiam na *figura 2*, o que permitiu determinar as áreas das *figuras 1* e *2* nas unidades fornecidas. Como ambos os resultados foram seis, a dupla concluiu que as áreas das figuras são iguais, baseando-se na aplicação de um conceito numérico de área. Nesse contexto, aplicaram um invariante operatório incorreto¹¹ que afirma que duas figuras

¹¹ É uma característica ou propriedade do objeto matemático que não muda mesmo após a aplicação de uma transformação ou operação. Esse invariante pode ser identificado e mantido através de diferentes representações ou contextos.

distintas, mesmo com unidades de área diferentes, têm a mesma área. A dupla D3, apresenta em suas respostas, justificativas semelhantes ao da dupla D2 após duplicar as unidades A e B utilizando o menu “Duplicar” do AG2 e, em seguida, deslizar tais unidades sobre as *figuras 1 e 2* conforme solicitado no enunciado da tarefa.

A dupla D5 também chegou à mesma conclusão realizando os mesmos procedimentos da dupla D3, mas justificam da seguinte forma de acordo com a Figura 5:

Figura 5- Extrato do protocolo D5

Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área? Sim.

Justifique como você pensou para responder essa tarefa:

Eu pensei que colocasse o triângulo verde dentro de cada um dos triângulos 1 e 2 e a ficar do mesmo jeito que os outros.

Fonte: arquivo da pesquisa

Essa dupla levou em consideração apenas a unidade de medida definida pelo triângulo verde para medir as áreas das *figuras 1 e 2*. Porém, observamos na captura de tela que eles se referiram ao triângulo verde para medir a área da *figura 1* e ao losango azul para medir a área da *figura 2*. Como a unidade B foi composta por dois triângulos congruentes à unidade A, esses estudantes se confundiram ao justificar suas respostas.

Observamos também que, para os estudantes da dupla D5 chegarem à resolução da tarefa, utilizaram o processo de ladrilhagem conforme previsto. Eles escolheram a ferramenta "Duplicar" do menu de operações, duplicaram as unidades A e B e ladrilharam cada uma das *figuras 1 e 2* com suas respectivas unidades, utilizando as ferramentas "Mover" e "Rotação", seguidas da contagem para definir as áreas das *figuras 1 e 2*. Para o ladrilhamento da figura 1, além de duplicarem, aplicaram ora reflexão, ora rotação nos triângulos para encaixá-los perfeitamente e completar a ladrilhagem dessa figura, com uma quantidade suficiente de triângulos em posições diferentes das dos duplicados.

Por exemplo, nas grandezas e medidas, a área de um quadrado é um invariante operatório quando o quadrado é transformado por rotações ou translações; a área permanece a mesma. Em contextos numéricos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é um invariante operatório, independentemente do comprimento dos lados ou da forma do triângulo.

A dupla D4 utilizou como procedimento para medir as áreas das *figuras 1* e *2* apenas a contagem, ou seja, visualmente contaram quantos triângulos iguais a “A” caberiam na *figura 1* e quantos losangos caberiam na *figura 2*, assim definindo as medidas de suas áreas como sendo 6. Também não levaram em conta o par número-unidade de medida, justificando que contaram e juntaram as unidades, conforme o extrato do protocolo apresentado na Figura 6 a seguir:

Figura 6- Extrato do protocolo da D4

Qual a área da figura 1 usando “A” como unidade de medida?	6
Qual a área da figura 2 usando “B” como unidade de medida?	(6)
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área?	A mesma área
Justifique como você pensou para responder essa tarefa:	
contando e juntando as mesma figura	

Fonte: arquivo da pesquisa

As duplas D5 e D6 levaram em consideração o par número-unidade de medida em suas respostas. Para os estudantes dessas duplas, inferimos que o aspecto numérico não é suficiente para determinar se duas figuras têm a mesma área. Observamos que eles explicitaram claramente que as *figuras 1* e *2* não possuem áreas iguais. No entanto, a justificativa final das respostas dessas duplas nos traz uma reflexão sobre a ideia de mesma área que foi mobilizada. Por exemplo, o extrato do protocolo da dupla D5 concluiu pela contagem visual das unidades: a área da *figura 1* são seis triângulos e a área da *figura 2* são seis losangos, e afirmam que essas figuras não têm a mesma área com base nos seguintes critérios explicitados na Figura 7:

Figura 7- Extrato do protocolo da D5

Justifique como você pensou para responder essa tarefa:
Porque elas não são iguais Porque elas tem o mesmo modelo e a figura 1 tem um triângulo e a outra tem dois triângulos

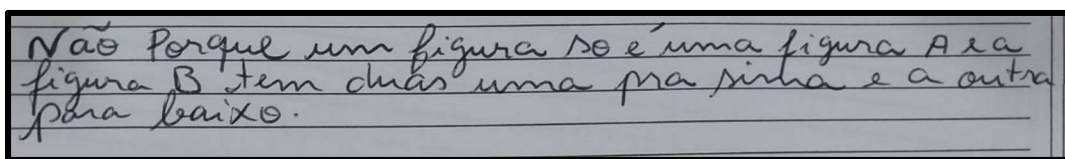
Fonte: arquivo da pesquisa

Identificamos que para essa dupla as figuras não têm mesma área porque não são iguais, assim a área estaria associada ao formato das figuras, ou seja, duas figuras para terem mesma área precisariam ser idênticas, nesse caso a área está associada ao aspecto

geométrico das figuras e não há uma articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, ao estabelecerem esse critério para definir se elas possuíam ou não as mesmas áreas.

Ainda assim, afirmam que elas têm o mesmo modelo. Interpretamos através da gravação em vídeo que a dupla D5 se referia ao formato das figuras, argumentando que a *figura 1* era composta apenas de triângulos e a *figura 2* de losangos, estes formados por dois triângulos. Como a *figura 2* era constituída por vários losangos, equivalentes a dois triângulos da unidade A, essa dupla entendeu que esses critérios eram fatores primordiais para determinar as diferenças de áreas.

Outro procedimento que destacamos foi o utilizado pela dupla D6 para definir as áreas das *figuras 1* e 2, que consistiu apenas na contagem visual. Eles verificaram que a área da *figura 1* correspondia a seis triângulos, enquanto a área da *figura 2* correspondia a seis losangos. O que nos chamou a atenção foi o método utilizado para verificar se as figuras tinham ou não as mesmas áreas. Essa dupla duplicou a *figura 1* e sobrepôs a *figura*



2, chegando à conclusão de que a *figura 2* era constituída por duas vezes a *figura 1*,

justapost
procedim

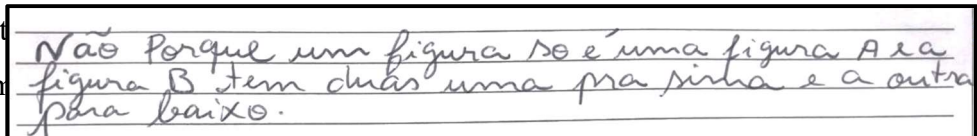


Figura 8- Extrato do protocolo da D6

A partir dessa justificativa e da análise dos protocolos vídeo gravados identificamos que para essa dupla D6 a questão numérica não determinava a diferença das áreas das *figuras 1* e 2, mas para elas esse aspecto se confirmava ao perceber que a *figura 2* era composta por duas figuras iguais a *figura 1*, sendo que uma delas em posição diferente.

Ferreira (2010) nos traz uma justificativa para essa questão, ao expor em seu estudo o princípio da aditividade das áreas, no qual essa dupla utilizou implicitamente, ou seja, a área da união de duas figuras sem sobreposição é igual à soma da área dessas duas figuras. Estendemos essa explicação para o seguinte procedimento se uma figura S é duplicada e obtém-se uma figura S', a soma das áreas de $S + S'$ será maior que a área

de S. Podemos perceber então que pela aditividade das áreas, a dupla D6, chega a uma conclusão correta sobre as áreas das *figuras 1 e 2* serem diferentes.

Todas as duplas percebem que as áreas das unidades A e B são invariantes por isometrias, e mesmo que a maioria não tenha levado em conta o par número unidade de medida, efetuaram as medições de cada uma das figuras utilizando as unidades sugeridas.

Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo investigar como estudantes do 6º ano do ensino fundamental tratam uma tarefa de medição de área utilizando o software de geometria *Apprenti Géomètre 2*. Buscamos caracterizar os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de uma tarefa que envolvesse o conceito de área, verificando, especialmente, a distinção entre área e sua medida. A escolha do *Apprenti Géomètre 2* visou avaliar o impacto do uso de uma ferramenta tecnológica no entendimento e no desenvolvimento do conceito de área.

Embora esperássemos que os alunos resolvessem a tarefa com facilidade, considerando que o conceito de área é abordado nos livros didáticos desde os primeiros anos do ensino fundamental (Ferreira, 2010, 2018), observamos que o aspecto numérico continua predominando na concepção de área dos alunos. Esse fator se reflete tanto na definição das áreas das figuras quanto na forma como comparam figuras para verificar a igualdade de áreas. Essa dependência do aspecto numérico é preocupante, pois indica que os alunos ainda não desenvolveram uma compreensão conceitual mais ampla e abstrata do que representa a área de figuras planas, um conhecimento essencial para diversas situações práticas e sociais.

Em relação ao uso do *Apprenti Géomètre 2*, constatamos que ele ofereceu suporte significativo para a execução da tarefa, graças à variedade de ferramentas lúdicas e acessíveis que facilitam a medição de áreas. O software não apenas tornou o processo de resolução mais ágil e envolvente, mas também permitiu que os alunos explorassem diferentes métodos de medição, promovendo uma experiência de aprendizagem mais interativa e imersiva. No contexto educacional, a introdução de tecnologias como o *Apprenti Géomètre 2* pode ser altamente benéfica, pois facilita o desenvolvimento de habilidades matemáticas de forma intuitiva, especialmente no ensino fundamental, no qual o aprendizado matemático exige uma construção prática e concreta.

Para pesquisas futuras, recomendamos a criação e implementação de sequências didáticas voltadas para a medição de área em diferentes contextos escolares, com o intuito

de trabalhar o conceito de área como uma grandeza que vai além de sua representação numérica. Essas sequências podem contribuir para um entendimento mais profundo e contextualizado desse conceito entre os alunos. Além disso, sugerimos que o conceito de área seja tratado de forma mais abrangente na formação inicial dos professores de matemática, de modo a capacitá-los para orientar os estudantes na construção de um conhecimento mais robusto sobre áreas de figuras planas e sua aplicabilidade prática. Dessa forma, espera-se que os professores estejam preparados para superar as limitações identificadas nesta pesquisa e possam guiar seus alunos em uma compreensão mais completa e significativa do conceito de área.

Recebido em: 13/06/2024

Aprovado em: 27/01/2025

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

ÁVILA, A; GARCÍA, S. Relaciones entre área y perímetro: de la intuición inicial a la deducción operatoria. Estudio en niños de alto desempeño académico. **Perfiles Educativos**, Ciudad de México, v. XLII, n. 167, p. 31-52, jan.-mar. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.14482/INDES.30.1.303.661>. Acesso em: 13 jun. 2024.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. 1996. 358 f. Thèse de doctorat (Doctorat en Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental e médio**. Natal. SBHMat, 2002.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages**. Tome 2. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007.

CREM, Apprenti Géomètre. **Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique**. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2005.

DIAS HENRIQUES, M.; MELCHIADES DA SILVA, A. Dificuldades de aprendizagem de Área e Perímetro na perspectiva da Produção de Significados. **Unión - revista iberoamericana de educación matemática**, v. 10, n. 37, 31 mar. 2014.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M.-J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387- 424, 1989.

FERREIRA, L. de F. D.; BELLEMAIN, P. M. B. **Estratégias utilizadas por alunos do 6º ano em questões da OBEMEP sobre as grandezas comprimento e área**. 2013. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/2899_1501_ID.pdf. Acesso em 13 jun. 2024.

FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, 2010.

FERREIRA, Lúcia de Fátima Durão. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental**: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 2018. 386 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2018.

LIMA, P.; BELLEMAIN, P. Grandezas e Medidas. In CARVALHO, J.B.P.F. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p.167- 200.

SAMSUDIN, A; NUGRAHA, T. Elementary School Students' Obstacles in Understanding the Concept of Area and Perimeter. *In: Proceedings of the International Conference on Teaching, Learning and Technology (ICTLT 2023)*. Atlantis Press, 2024. p. 136-145. Disponível em: <https://www.atlantispress.com/proceedings/ictlt-23/125997513>. Acesso em: 13 jun. 2024.

SANTOS, J. C. **A resolução de problemas sobre perímetro e área: um experimento de ensino, utilizando problemas propostos em avaliações de larga escala**. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera, São Paulo, 2021.

SILVA, A. D. P. R. da; SILVA, J. F; GOMES, K. R. F. P. Área de figuras planas: um estudo por meio de diferentes atividades no Apprenti Géomètre 2. *In: SILVA, A. D. P. R. da. (org.). Produção Acadêmica de Estudantes dos Cursos de Licenciatura e Bacharelado da FADIMAB*. Formiga (MG): Editora Real Conhecer, 2023, p. 44-63.

SILVA, A. D. P. R. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica**: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental. 2016. 315 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2016

SILVA, A. D. P. R.; BELLEMAIN, P. M. B. A comparação de áreas de figuras planas em diferentes ambientes: papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.8, Nº 3, 2017.

SILVA, J. V. da.; SILVA, A. D. P. R. da.; OLIVEIRA, D. M. de.; OLIVEIRA, I. R. de. O ensino de matemática: uma experiência com alunos do 5º ano do ensino fundamental

de forma remota em tempos de pandemia. *In*: SILVA, A. D. P. R. da.; OLIVEIRA, I. R. de.; SILVA, J. V. da. **Produção acadêmica dos estudantes do curso de licenciatura em matemática da FADIMAB**. Formiga (MG): Editora Real Conhecer, 2022, p. 9-23. Disponível em: <https://editora.realconhecer.com.br/2022/02/producao-academica-dos-estudantes-do.html>. Acesso em 17 mai. 2024.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.



Artigo está licenciado sob forma de uma licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional