EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i3p204-229

Interpretações do número racional como um dos elementos centrais do desenvolvimento do raciocínio proporcional: uma abordagem com o Frac-Soma

Rational number interpretations as one of the central elements in the development of proportional reasoning: an approach with Frac-Soma

Interpretaciones de números racionales como uno de los elementos centrales del desarrollo del razonamiento proporcional: una aproximación con Frac-Soma

Interprétation des nombres rationnels comme l'un des éléments centraux du développement du raisonnement proportionnel : une approche avec Frac-Soma

Claudia Aparecida Winkelmann [1]
Secretaria Municipal de Educação, Cultura, Turismo e Desporto de Sobradinho, RS
Mestrado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-4041-7209

Rita de Cássia Pistóia Mariani [2]
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-8202-8351

Maria Arlita da Silveira Soares [3]
Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul, RS (UNIPAMPA)
Doutorado em Educação nas Ciências
https://orcid.org/0000-0001-5159-8653

Resumo

Este artigo objetiva analisar os conhecimentos produzidos por alunos do 7º ano do ensino fundamental ao resolverem atividades que enfatizam as interpretações do número racional quociente e operador. A pesquisa é norteada por uma abordagem qualitativa e a produção de dados considerou protocolos de 11 atividades que foram desenvolvidas em uma turma de dez alunos de uma escola pública de Sobradinho/RS, além de gravações (áudio e vídeo), fotografias e diário de bordo da professora/pesquisadora. Dentre os resultados, constatou-se que noções relativas à partilha justa foram compreendidas, pois os alunos estabeleceram conexões entre as quantidades solicitadas e o processo de particionamento, necessárias à compreensão da interpretação quociente e ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Em contrapartida, identificaram-se obstáculos em relação à noção de comparação, pois não foram sistematizadas

[1] claudia.wkm@gmail.com
[2] rita.mariani@ufsm.br
[3] mariasoares@unipampa.edu.br

conclusões acerca das noções de “quanto mais/menos” uma quantidade é maior/menor que a outra. Para minimizar essas dificuldades, durante as intervenções da professora/pesquisadora, foi necessário enfatizar o processo de unitização, fundamental à compreensão da noção de equivalência e ao raciocínio proporcional. Nas atividades envolvendo a interpretação operador, verificou-se que na ação de particionar o inteiro, bem como “trocar” peças do Frac-Soma por outras, ocorreu “perda” da referência da unidade. Após discussões nos grupos e intervenções da professora/pesquisadora, perceberam-se indícios de entendimentos de operador como uma função capaz de transformar a unidade em outra semelhante. Em conclusão, observou-se que os alunos apresentaram entendimentos sobre essas interpretações do número racional, embora, as noções de operador e comparação ainda sejam um desafio para alguns.

Palavras-chave: Educação matemática, Particionamento, Partilha, Comparação, Unitização.

Abstract

This article aims to analyze understandings of students of the 7th grade of elementary school when solving activities that emphasize the rational number interpretations, quotient and operator. For this purpose, a qualitative approach was employed to assess 11 activities that utilized Frac-Soma and were conducted with a class of ten students from a public school in Sobradinho, RS. Data production considered protocols, recordings (audio and video), photographs, and the teacher/” ’researcher’s logbook. Among the results was that notions related to fair sharing were understood, as the students established connections between the requested quantities and the partitioning process, necessary for understanding the quotient interpretation and the development of proportional reasoning. On the other hand, obstacles were identified in relation to the comparison notion, as conclusions were not systematized regarding the notions of “the more”/“the less” one quantity is greater/smaller than another. To minimize these difficulties, during the teacher/” ’researcher’s interventions, it was necessary to emphasize the unitization process, which is fundamental to understanding the equivalence notion and this to proportional reasoning. In activities involving operator interpretation, it was found that in the action of partitioning the integer, as well as “exchanging” Frac-Soma parts for others, there was a “loss” of the unit reference. After discussions in the groups and teacher/researcher interventions, signs of understanding that the operator is a function capable of transforming the unit into another similar one was noticed. Thus, it could be concluded that the students presented an understanding of these rational number interpretations, although the notions of operator and comparison are still a challenge for some.

Keywords: Mathematics education, Partitioning, Sharing, Comparison, Unitization.

Resumen

Este artículo tiene como objetivo analizar las comprensiones de estudiantes de 7º grado al resolver actividades que enfatizan las interpretaciones del cociente y del operador de números racionales. Para ello, se optó por un abordaje cualitativo para apreciar 11 actividades que hicieron uso del Frac-Soma y fueron dinamizadas en una clase de diez estudiantes de una escuela pública de Sobradinho/RS. La producción de datos consideró protocolos, grabaciones (audio y vídeo), fotografías y el cuaderno de bitácora del profesor/investigador. Entre los resultados, se constató la comprensión de nociones relacionadas con el reparto equitativo, ya que los estudiantes establecieron conexiones entre las cantidades solicitadas y el proceso de partición, necesarias para la comprensión de la interpretación del cociente y el desarrollo del razonamiento proporcional. Por otro lado, se identificaron obstáculos en relación con la noción de comparación, ya que no se sistematizaron las conclusiones sobre las nociones de "cuánto más"/"cuánto menos" una cantidad es mayor/menor que la otra. Para minimizar estas dificultades, durante las intervenciones del profesor/investigador fue necesario hacer hincapié en el proceso de unitización, fundamental para comprender la noción de equivalencia y ésta para el razonamiento proporcional. En las actividades que involucraron la interpretación del operador, se constató que, en la acción de partición del entero, así como en el "cambio" de pedazos de Frac-Soma por otros, hubo "pérdida" de la unidad de referencia. Después de las discusiones en los grupos y de las intervenciones del profesor/investigador, se evidenció la comprensión del operador como una función capaz de transformar la unidad en otra semejante. Así, se puede concluir que los estudiantes presentaron comprensiones sobre estas interpretaciones del número racional, aunque las nociones de operador y comparación aún sea un desafío para algunos.

Palabras clave: Educación matemática, Particionamiento, Compartir, Comparación, Unitización.

Résumé

Cet article vise à analyser les connaissances des élèves de 7e année lors de la résolution d'activités qui mettent l'accent sur les interprétations du quotient et de l'opérateur des nombres rationnels. À cette fin, une approche qualitative a été choisie pour évaluer 11 activités utilisant Frac-Soma et dynamisées dans une classe de 10 élèves d'une école publique de Sobradinho/RS. La production de données a pris en compte les protocoles, les enregistrements (audio et vidéo), les photographies et le journal de bord de l'enseignant/chercheur. Parmi les résultats, il a été constaté que les notions liées au partage équitable étaient comprises, car les élèves établissaient des liens entre les quantités demandées et le processus de partition, nécessaires à la compréhension de l'interprétation du quotient et au développement du raisonnement proportionnel. En revanche, des obstacles ont été identifiés en ce qui concerne la notion de comparaison, car les conclusions n'ont pas été systématisées sur les notions de "combien de plus"/"combien de moins" une quantité est plus grande/moins grande que l'autre. Pour minimiser ces difficultés, lors des interventions de l'enseignant/chercheur, il a été nécessaire de mettre l'accent sur le processus d'unitisation, qui est fondamental pour comprendre la notion d'équivalence et donc le raisonnement proportionnel. Dans les activités impliquant l'interprétation de l'opérateur, il a été constaté que l'action de partitionner l'entier, ainsi que "l'échange" de morceaux de Frac-Soma contre d'autres, entraînait une "perte" de la référence à l'unité. Après les discussions au sein des groupes et les interventions de l'enseignant-chercheur, il est apparu que l'opérateur comprenait qu'il s'agissait d'une fonction capable de transformer l'unité en une autre unité similaire. On peut donc conclure que les étudiants ont compris ces interprétations des nombres rationnels, même si les notions d'opérateur et de comparaison restent un défi pour certains d'entre eux.

Mots-clés: Enseignement des mathématiques, Cloisonnement, Partage, Comparaison, Inutilisation.

Interpretações do número racional como um dos elementos centrais do desenvolvimento do raciocínio proporcional: uma abordagem com o Frac-Soma

O desenvolvimento do raciocínio proporcional tem sido alvo de estudos de pesquisadores internacionais e nacionais (Lesh, Post & Behr, 1988; Lamon, 2008; Oliveira, 2009; Maranhão & Machado, 2011; Oliveira, 2014; Soares, 2016), dada sua importância para a matemática, práticas sociais e outras áreas do conhecimento. Sabe-se que inúmeras situações desses campos requerem uma análise qualitativa e quantitativa do fenômeno investigado e, geralmente, essas análises revelam princípios proporcionais. Para Lesh, Post e Behr (1988, p. 1, tradução nossa), o raciocínio proporcional é:

> uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariância e múltiplas comparações, assim como aptidão para processar mentalmente diversos conjuntos de informação. [...] está relacionado com a inferência e predição e envolve o pensamento qualitativo e quantitativo. [...] as principais características do raciocínio proporcional envolvem o raciocínio sobre as relações holísticas entre duas expressões racionais, tais como, taxa, razão, quociente e fração. Isto abrange invariavelmente a apropriação e a síntese mentais dos vários complementos destas expressões e uma aptidão para inferir sobre a igualdade ou desigualdade de pares ou séries dessas expressões, baseada na análise e na síntese. Também envolve a habilidade de produzir com sucesso as componentes omissas, independentemente dos aspectos numéricos do problema.

Nessa perspectiva, o raciocínio proporcional abarca noções de covariância (perceber que a variação das variáveis é dada em conjunto) que possibilitam fazer comparações múltiplas (numéricas e não numéricas) entre expressões racionais e verificar sua igualdade ou desigualdade. Além disso, implica na resolução, com destreza, de situações de valor omisso, sem depender dos valores numéricos. Os pesquisadores, nessa conceituação, apontam uma relação entre o raciocínio proporcional e os diferentes significados/interpretações do número racional na representação fracionária (taxa, razão, quociente, fração), sendo que o termo fração se aproxima de uma ideia de parte-todo.

Essa relação também é mencionada por Lamon (2008). Conforme a pesquisadora, a compreensão dos números racionais e os conceitos multiplicativos relacionados a ele estão diretamente ligados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, bem como a capacidade de raciocinar proporcionalmente é um indicador do entendimento desses números. Assim, faz-se necessário entender que sob um único símbolo $\left(\frac{a}{b}\right)$ encontra-se um mundo de significados, múltiplas interpretações, representações e formas de pensar e operar (Lamon, 2008). A existência dessa diversidade de significados/interpretações e representações, segundo Graça, Ponte e Guerreiro (2021), gera a maioria das dificuldades dos estudantes no estudo dos números racionais.

Outro fato que torna a compreensão dos números racionais mais complexa e, consequentemente, o desenvolvimento do raciocínio proporcional, conforme apontado por distintos pesquisadores (Lamon, 2008; Oliveira, 2014; Soares, 2016; Graça; Ponte; Guerreiro, 2021), é a ênfase dada a apenas um dos significados/interpretações do número racional na representação fracionária, ou seja, a relação parte-todo. Para Lamon (2008), os estudantes cujo processo de ensino e aprendizagem centrou-se na interpretação[4] parte-todo têm uma compreensão empobrecida de número racional e, consequentemente, problemas na mobilização de aspectos relativos ao raciocínio proporcional.

Nesse viés, o processo de ensino e aprendizagem precisa levar em consideração o trabalho com as diferentes interpretações do número racional, a saber: parte-todo[5], medida[6], razão[7], quociente[8] e operador[9]. Isso porque potencializa a compreensão de "quais operações aritméticas são válidas ao lidar com algumas dessas interpretações em problemas matemáticos ampliando o conhecimento constituído a respeito desse conjunto numérico, estimulando o desenvolvimento/mobilização de aspectos do raciocínio proporcional" (Oliveira, 2014, p. 63). Associadas as várias interpretações do número racional, Lamon (2008) descreve estruturas centrais do conhecimento matemático que se inter-relacionam, constituindo uma rede de conceitos, contextos, representações e formas de raciocinar, fundamentais ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, sendo as interpretações do número racional um dos "nós" dessa rede.

Os recursos escolhidos pelos professores para explorar as diferentes interpretações do número racional e dos demais "nós" da rede, proposta por Lamon (2008), são de fundamental importância. O Frac-Soma[10] é um dos recursos que pode contribuir para a compreensão dos números racionais e, consequentemente, para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Esse material manipulável é composto por 235 peças que são dispostas em dezoito tiras, das quais uma é inteira e as demais são particionadas de forma equitativa, conforme múltiplos de

---

[4] Este é o termo utilizado por Lamon (2008) para tratar dos diferentes significados assumidos pela representação fracionária do número racional em diferentes contextos. Assim, no decorrer do texto, será utilizado o termo proposto por Susan Lamon.

[5] Indica o número racional a partir da relação entre a quantidade de partes iguais de uma unidade em relação ao número total de partes em que está dividida.

[6] Associa o número racional a pontos da reta numérica, embasada na ideia de que um número racional $\frac{a}{b}$ é o valor atribuído a a intervalos de comprimento $\frac{1}{b}$.

[7] Determina o número racional como um par ordenado de números que expressa tamanhos relativos de duas grandezas.

[8] Relaciona o número racional como resultado de uma divisão, em outros termos, quando determinado número de objetos precisa ser repartido igualmente em um certo número de grupos.

[9] Direciona o número racional à medida de alguma mudança numa quantidade a partir de um estado anterior.

[10] A versão original desse material foi proposta por Baldino (1983).

2, 3 e/ou 5, entre 1 e 30. A atividade de particionamento[11], conforme Lamon (2008), é o ponto central da compreensão dos números racionais, pois esses números são um campo quociente. Além disso, essa atividade gera as outras interpretações dos números racionais, bem como contribui para a atribuição de significados ao estudar as operações com esses números. Assim, a confecção do Frac-Soma, por meio de ações de particionamento, é importante para que os estudantes compreendam números racionais. Para tanto, é preciso considerá-lo como uma representação parcial do objeto matemático e entender que a aquisição conceitual só ocorre se o estudante estabelecer relações entre o material manipulável e outras representações (numérica, figural, algébrica) num processo de abstração e generalização. Diante desse contexto, o presente estudo objetiva analisar entendimentos de alunos do 7º ano do ensino fundamental ao resolverem atividades que enfatizam as interpretações do número racional quociente e operador.

Interpretações do número racional na perspectiva de Susan Lamon: inter-relações com o desenvolvimento do raciocínio proporcional

Conforme mencionado na Introdução, Lamon (2008) afirma que o desenvolvimento do raciocínio proporcional envolve estruturas centrais do conhecimento matemático (Figura 1) interligadas entre si, formando uma rede de conceitos, procedimentos, representações e maneiras de pensar, expressas por sete "nós" (interpretações do número racional, medição, quantidade e covariação, unitização, raciocínio relativo, partilha e comparação, raciocínio progressivo e regressivo).

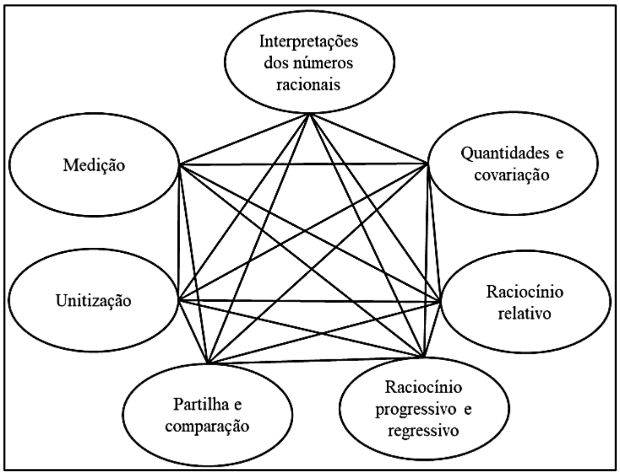


Figura 1.

Estruturas centrais do conhecimento (Adaptado de Lamon, 2008)

[11] Este conceito será discutido na próxima seção.

Para Lamon (2008), há uma inter-relação entre a compreensão dos números racionais e o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Neste trabalho, serão apresentadas algumas considerações relacionadas as interpretações do número racional, em especial, quociente e operador, conforme já mencionado, bem como acerca dos “nós” da rede, a saber: medição, por sua estreita conexão com as diferentes interpretações de números racionais na representação fracionária; partilha e comparação, pelas conexões com a interpretação quociente e o recurso utilizado no desenvolvimento das atividade, a saber: o Frac-Soma; e unitização, por suas relações com a ideia de equivalência e operações com números racionais. Para tanto, recorremos às ideias de outros autores para complementar o ponto de vista de Lamon (2008).

Cyrino et al. (2014), fundamentados em Lamon (2008), afirmam que a noção de medida ou de medição está presente na constituição do conhecimento do número racional na representação fracionária e, consequentemente, na base do desenvolvimento do raciocínio proporcional. As diferentes interpretações do número racional, um dos “nós” da rede de Lamon (2008), podem ser concebidas como maneiras variadas de realizar medições, pois:

> uma fração [comparação] parte-todo mede a relação multiplicativa de uma parte com o todo à qual pertence; uma razão mede grandezas relativas; uma taxa como a velocidade é uma quantificação do movimento; um quociente é uma medida de quanto 1 pessoa recebe quando m pessoas compartilham n objetos; um operador é uma medida de alguma mudança numa quantidade a partir de um estado anterior; como uma medida, um número racional quantifica diretamente uma qualidade, tal como comprimento ou área (Lamon, 2008, p. 40, tradução nossa).

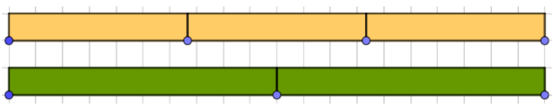
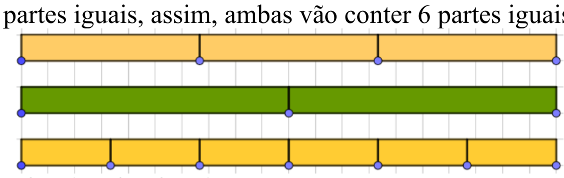
Lamon (2008), ao analisar o processo de ensino e aprendizagem, em particular, nos Estados Unidos da América, constatou que o ato de medir é subestimado, principalmente, no começo do estudo de números racionais na representação fracionária, pois as atividades propostas não proporcionam a compreensão dos princípios de medição (conservação da distância e área; deslocamento e particionamento; relação entre unidades). Em contrapartida, as atividades propostas com o Frac-Soma, apresentadas nas duas seções que discutem os resultados deste estudo, priorizam os princípios de medição, em especial, conservação da área e particionamento.

O processo de particionamento, conforme Lamon (2008), é o ponto central da compreensão dos números racionais na representação fracionária, visto que esses números tem origem na ideia de partilha, na ação de particionar a unidade (contínua ou discreta), em partes disjuntas e iguais. Se particionar é importante, comparar também é, pois, por exemplo, nas atividades de particionamento, além de sombrear uma figura para visualmente julgar que $\frac{2}{3}$ de uma unidade é mais do que $\frac{1}{2}$ da mesma unidade, espera-se saber o "quanto mais" é maior.

Nesse sentido, deseja-se que a análise da atividade vá além dos julgamentos qualitativos (maior/menor), ou seja, envolva análises quantitativas (quanto mais/quanto menos). Destaca-se que, a "ideia de efetuar divisões [partições] em uma unidade, podendo em seguida estabelecer comparações entre essas divisões, está também relacionada à medição" (Oliveira, 2014, p. 62). Com base nessas compreensões, Lamon (2008) propõe como um dos "nós" da rede de aspectos centrais ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, a partilha e a comparação (Figura 1). A Tabela 1 apresenta uma atividade que envolve partilha e comparação, utilizando como recurso o Frac-Soma.

Tabela 1.

Atividade envolvendo partilha e comparação (Adaptado de Lamon, 2008)

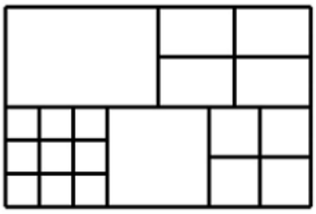
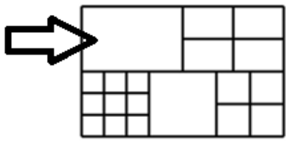
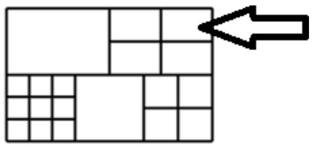
Atividade	*Uma possível solução*
a) Determine como cortar as tiras abaixo, de modo que fiquem com peças de mesmo tamanho. b) Determine quanto a mais é tomado se forem consideradas duas peças da tira amarela e uma da verde. 	a) Para cortar as tiras de modo que fiquem com peças do mesmo tamanho, basta cortar cada peça da primeira tira ao meio e cortar cada peça da segunda tira em três partes iguais, assim, ambas vão conter 6 partes iguais.  b)$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

Apresentada na Tabela 1, a atividade evidencia um dos principais conceitos relacionados ao número racional e ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, isto é, equivalência, pois é preciso constatar que as partições realizadas nas tiras (amarela e verde) originam peças que correspondem a $\frac{1}{6}$ do inteiro (da tira), permitindo expressar $\frac{2}{3}$ como $\frac{4}{6}$ e $\frac{1}{2}$ como $\frac{3}{6}$ e verificar que $\frac{2}{3}$ é $\frac{1}{6}$ maior que $\frac{1}{2}$.

O "nó" relativo à unitização envolve o processo de reorganizar as grandezas, reagrupando-as de modo a representarem as mesmas quantidades totais, cujas unidades referenciais permanecem iguais, porém expressas por formas fracionárias diferentes (Lamon, 2008). Assim, a unitização desempenha um papel fundamental em vários processos necessários para compreender números racionais na representação fracionária, em especial, na partilha (particionamento), na equivalência e nas operações com racionais. A atividade exposta na Tabela 2 envolve a unitização.

Tabela 2.

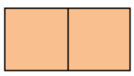
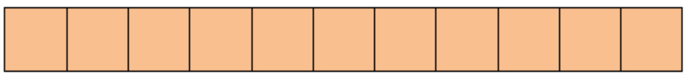
Atividade envolvendo unitização (Adaptado de Lamon, 2008)

Atividade	*Uma possível solução*
Descreva como você pode “ver” $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{16}$ na figura abaixo. 	Olhe para o retângulo da parte superior à esquerda, ele corresponde a $\frac{1}{4}$ da unidade.  Olhe para o retângulo “pequeno” da parte superior à direita, ele corresponde a $\frac{1}{16}$ da unidade. 

Neste caso, é fundamental a proposição de atividades que incentivem o processo de unitização, pois este possibilita pensar sobre qualquer quantidade dada, e escolher ou antecipar a melhor maneira para resolvê-la. Mas, concomitantemente, é preciso evidenciar a importância da unidade no estudo dos números racionais na representação fracionária e no desenvolvimento do raciocínio proporcional, pois, conforme Lamon (2008), seu ensino, geralmente, tem sido explorado como objeto único. No entanto, quando se trata de números racionais na representação fracionária, a unidade pode ser um conjunto de objetos representando-a. A atividade reproduzida na Tabela 3 exemplifica essa afirmação.

Tabela 3.

Atividade envolvendo conjunto de objetos como unidade (Adaptado de Lamon, 2008)

Atividade	*Uma possível solução*
Se a unidade de medida é:  e a tira é:  Quanto mede essa tira?	A unidade cabe 5 vezes e meia na tira, ou seja, $5\frac{1}{2}$.

Como mencionado, um dos “nós” da rede proposta por Lamon (2008) refere-se às diferentes interpretações do número racional, que podem ser entendidas como medida. Dentre essas interpretações, este estudo considera quociente e operador, buscando relações com os “nós” da rede e com o Frac-Soma.

A interpretação quociente para o número racional é concebida com base na partição ou divisão de um inteiro em partes iguais (divisão equitativa). A compreensão desse processo acompanha o estudante no decorrer dos anos escolares, visto que envolve situações relativas à partilha justa, ou seja, ao ato de dividir um objeto de maneira que todos os envolvidos recebam a mesma quantidade (Lamon, 2008). Nessa perspectiva, o número racional na interpretação quociente pode ser compreendido como partição, "na qual a é uma quantidade e b é um parâmetro, assim, na representação $\frac{a}{b}$, a quantidade a é operada da maneira indicada pelo parâmetro b" (Oliveira, 2014, p. 65).

Destaca-se que, "diferente das situações que envolvem a concepção parte-todo, nesta [quociente], a quantidade a pode ser menor, maior ou a mesma que b e pode representar objetos diferentes" (Silva & Almouloud, 2018, p. 113). Em outras palavras, enquanto nas interpretações parte-todo e medida encontramos uma mesma unidade, isto é, apenas uma variável, na intepretação quociente podemos encontrar duas variáveis diferentes. Um exemplo que envolve essa interpretação pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4.

Exemplo de atividade envolvendo a interpretação quociente (Dados da pesquisa)

Observe a história em quadrinhos e responda:

Eu tinha...	*Dividi uma tira entre...* Guilherme e Natiéli	*Dividi as outras duas tiras entre...* Daniel, Vitória, Anna Jullya e Bryan

a) Que peça do Frac-Soma foi recebida por Guilherme? Que fração representa?
b) Que fração representa a quantidade que Daniel, Vitória, Ana Julia e Bryan receberam?
c) Quem recebeu mais: Vitória ou Natiéli? Por quê?

Na atividade (Tabela 4), um número de objetos (3 tiras do Frac-Soma) precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos (1 tira para 2 pessoas e 2 tiras para 4 pessoas). Ao dividir a tira entre Guilherme e Natiéli, é possível verificar que a peça do Frac-Soma que Guilherme receberá corresponde a $\frac{1}{2}$ do inteiro ($1 \div 2$). Por sua vez, a peça recebida por Daniel corresponde a $\frac{2}{4}$ do inteiro ($2 \div 4$), equivalente à peça recebida por Guilherme. Como a peça recebida por Vitória é igual à recebida por Daniel (partição equitativa) e a peça recebida por

Natiéli é igual à recebida por Daniel (partição equitativa), sendo essas peças equivalentes, as meninas recebem peças de mesmo tamanho (equivalentes).

Assim, a interpretação quociente está submetida "à teoria da função quociente e, aqui, a barra fracionária é um símbolo para esta função $\frac{x}{y} \equiv quociente(x, y)$, comumente escrito como $x \div y$, em que o dividendo x e o divisor y simbolizam seus argumentos" (Onuchic & Allevato, 2008, p. 88, grifos nossos). Na atividade (Tabela 4), $\frac{2}{4}\frac{tiras\ (t)}{pessoas\ (p)}$, significa, $2t \; \left| \underline{4p} \right. \atop \frac{2}{4}\frac{t}{p}$, pois $\frac{2}{4}\frac{t}{p} \cdot 4p = 2t$. Ao indicar o quociente $\frac{2}{4}$ com a notação "barra fracionária", reforça-se o fato de que em $\mathbb{Q}$ todas as divisões têm resto zero. Sublinha-se que, a interpretação quociente do número racional vai além de particionar elementos, ela permite análises comparativas (Lamon, 2008; Soares, 2016), conforme letra c) da atividade (Tabela 4).

Para Lamon (2008), a interpretação operador trata-se de um conjunto de instruções para executar um processo, capaz de encolher ou ampliar, de contrair ou expandir, de multiplicar ou dividir, transformando quantidades em outras. Por exemplo, "$\frac{3}{5}$ *de"* pode ser visto como uma única operação numa quantidade x, pode ser visto, também, como uma multiplicação de x por 3 seguida da divisão do resultado por 5 ou, ainda, como uma divisão de x por 5 seguida da multiplicação do resultado por 3. Em outras palavras, "$\frac{3}{5}$ *de* x", sendo x igual a 20, deve ser interpretado como uma função composta e, assim, "$\frac{3}{5}$ de 20" corresponde a: $\frac{3}{5} \times 20 = 3 \times (20 \div 5) = (3 \times 20) \div 5 = 3 \times 4 = 60 \div 5 = 12$. Nessa perspectiva:

> A notação barra fracionária $\frac{a}{b}$, [...], é usada para simbolizar uma classe particular de funções compostas definida por $\frac{a}{b} \times x = a \times (x \div b) = (a \times x) \div b$, onde a e b são constantes e x é uma expressão numérica para alguma quantidade. A barra fracionária não é nem um símbolo funcional nem um delimitador, mas um símbolo para a operação de composição de funções (Onuchic & Allevato, 2008, p. 93).

A interpretação operador se diferencia das demais, pois, neste caso, "[...] a relação significativa é a comparação entre a quantidade resultante de uma operação e a quantidade que está agindo sobre" (Lamon, 2008, p. 153). O entendimento dessa comparação conduz à compreensão da operação de multiplicação envolvendo números racionais, que pode ser explorada por meio da manipulação das peças do Frac-Soma.

Para exemplificar essa afirmação, considere "$\frac{1}{3}$ *de*" uma quantidade já estabelecida, neste caso, $\frac{1}{2}$. Para isso, deve-se tomar "$\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{2}$". A Figura 2 ilustra essa situação, utilizando o

Frac-Soma. Primeiramente, é assumida uma parte de um inteiro, dividido em duas partes iguais (tira verde), aplicando o operador $\frac{1}{2}$. Em seguida, ao utilizar $\frac{1}{3}$ como um operador sobre a quantidade já estabelecida, busca-se a peça que caiba 3 vezes no $\frac{1}{2}$ e, por consequência, 6 vezes no inteiro (tira amarela). A peça procurada correspondente a $\frac{1}{6}$, logo, $\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{6}$.

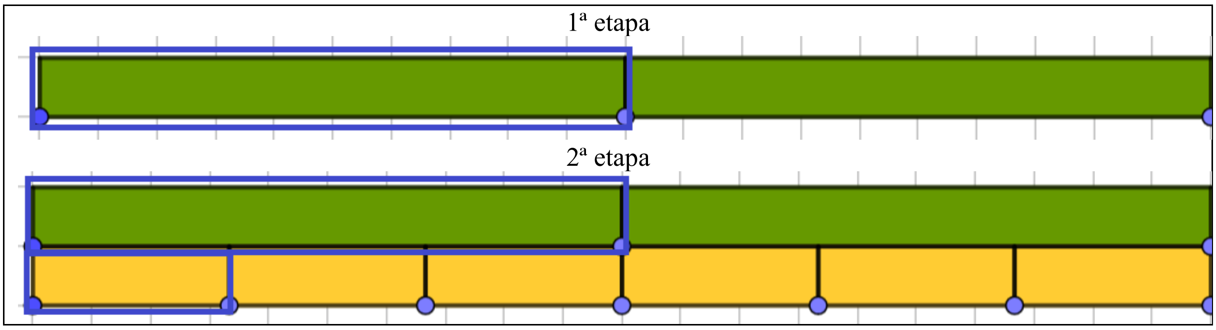


Figura 2.

Multiplicação de números racionais (Dados da pesquisa)

A ação realizada no Frac-Soma indica que multiplicar números racionais significa tomar partes das partes de uma unidade. Diante dos aspectos apresentados, fundamentados em Lamon (2008), pode-se afirmar que ensinar números racionais e desenvolver o raciocínio proporcional é um desafio tanto do ponto de vista cognitivo quanto matemático, exigindo do professor e/ou pesquisador a elaboração de atividades que ao mesmo tempo que contemplam a complexidade matemática e cognitiva amenizem as dificuldades de aprendizagem (Soares, 2016; Graça, Ponte & Guerreiro, 2021).

Aspectos Metodológicos

A pesquisa que deu origem a este trabalho é caracterizada como qualitativa, pois está situada em um contexto educativo que "admite um leque diversificado de procedimentos, sustentados por diferentes concepções de realidade e de conhecimento" (Bicudo, 2012, p. 24). Dessa forma, pesquisar qualitativamente significa procurar compreender aspectos da realidade e das relações sociais, as quais "nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações" (Borba & Araújo, 2019, p. 25).

Para tanto, elaboramos e dinamizamos uma sequência de atividades com o objetivo de promover entendimentos sobre números racionais, na representação fracionária, por meio das interpretações medida, parte-todo, quociente, operador e razão, evidenciando a mobilização de distintos sistemas representacionais desencadeados pelo Frac-Soma. As primeiras atividades da sequência envolveram a confecção, o reconhecimento das propriedades e a nomeação das peças de uma versão adaptada do Frac-Soma, elaborada pelos alunos em cartolina, na cor branca, com tiras individuais contendo de 1 a 15 peças, conforme o particionamento sugerido. As demais atividades, em função da necessidade de precisão no tamanho de cada peça, foram realizadas com um Frac-Soma completo (contendo as 235 peças) na cor azul (Figura 3), produzido em E.V.A. pela professora/pesquisadora, primeira autora deste trabalho.

Figura 3.

Composição do material manipulável Frac-Soma (Acervo pessoal da professora/pesquisadora)

A escolha por não diferenciar as tiras por cores, conforme a característica original do Frac-Soma (Baldino, 1983) tem por base dois aspectos: primeiro, pelo fato de não permitir a associação entre a quantidade de peças de cada tira e sua correspondência à determinada cor e ao respectivo múltiplo; segundo, constatar que, ao posicionar as peças, torna-se necessário identificar os comprimentos congruentes e verificar que a altura de todas as peças é a mesma.

Para atender ao objetivo da sequência, cada interpretação foi enfatizada, inicialmente, com o uso do Frac-Soma, seguida por outras atividades que não utilizavam o material manipulável, mas privilegiavam conversões entre representações figurais, numéricas e algébricas. Ao todo, foram propostas 56 atividades (257 itens), sendo que 26 delas (127 itens) fizeram uso do Frac-Soma, conforme Tabela 5.

A dinamização da sequência ocorreu no horário regular das aulas de Matemática de uma turma de 7º ano de uma escola pública de Sobradinho/RS. A turma era composta por dez alunos denominados, neste estudo, por Aluno A, Aluno B, ..., Aluno J, respectivamente. Como os alunos vivenciaram um cenário educacional de aulas remotas ao longo do 5º ano e em parte do 6º, em função da pandemia mundial do coronavírus, SARS-CoV-2, causador da covid-19, aspectos referentes aos números racionais e suas interpretações foram estudados pela primeira vez por meio da sequência de atividades que compõe esta investigação.

Tabela 5.

Síntese das atividades e sua dinamização (Elaborado pelas autoras)

Tema	Atividades	Itens	Horas-aula	Data
Confecção do material	A1 à A4	28	6	20 e 21de junho de 2022
Interpretação Medida	A5 à A15	66	6	28 e 29 de junho de 2022
Interpretação Parte-todo	A16 à A29	69	4	05 e 06 de julho de 2022
Interpretação Quociente	A30 à A38	30	4	13 e 20 de julho de 2022
Interpretação Operador	A39 à A50	48	4	02 e 03 de agosto de 2022
Interpretação Razão	A51 à A56	16	2	10 de agosto de 2022

Em termos de produção de dados, para estimular discussões durante o desenvolvimento das atividades, os alunos foram dispostos em quatro grupos de dois ou três componentes, denominados G1, G2, G3 e G4, de modo a contemplar os princípios éticos e manter o anonimato dos sujeitos[12]. Durante o desenvolvimento da sequência, as atividades foram projetadas no quadro da sala, bem como a leitura realizada em voz alta pela professora/pesquisadora. Dentre as fontes de produção de dados, foram considerados: protocolos dos alunos, sistematizados durante os encontros em folhas auxiliares; gravações em áudio e vídeo que revelam diálogos e gestos ocorridos no processo de resolução das atividades; fotografias que revelam momentos de manipulação do Frac-Soma; e, diário de bordo da professora/pesquisadora que contém reflexões sobre o desenvolvimento da sequência.

Por meio das fontes foram identificados e descritos episódios, compostos pela transcrição de alguns diálogos estabelecidos pelos alunos e pela professora/pesquisadora (P) no decorrer da dinamização das atividades. Em alguns momentos aparecem marcações do tipo [...], indicando exclusões da transcrição, por se tratar de vícios de linguagem ou ainda por não terem sido compreensíveis. Além disso, para referenciar os extratos da fala, utilizamos a denominação do aluno, o código numérico da atividade e seu respectivo item, seguido pelo mês e ano de aplicação da atividade, por exemplo, Aluna A_A30_c_agosto, 2022.

Para compor este trabalho, consideramos 11 atividades que versam sobre as interpretações quociente e operador, todas fazendo uso do Frac-Soma. Por meio das análises realizadas, foram compostas duas seções. A primeira versa sobre noções relativas à partilha e comparação. A segunda enfatiza a interpretação operador e as relações com a operação de multiplicação de números racionais.

[12] A pesquisa foi registrada e aprovada no Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, possuindo Certificado de Apresentação para Apreciação Ética-CAAE.

Noções relativas à partilha e comparação

A atividade 30 (A30 - Figura 4) envolveu a exploração de números racionais na representação fracionária visto como quociente, ou seja, propôs a partilha/divisão equitativa da peça que representa o inteiro no Frac-Soma entre certa quantidade de pessoas. Para isso, os alunos precisavam determinar, por meio das peças do recurso, o número racional correspondente à partilha/divisão realizada.

30) Distribuindo peças do Frac-Soma a partir da tira que representa o inteiro:

a) Divida igualmente o inteiro entre Bryan e Vitória. Como podemos fazer essa distribuição? Que fração do inteiro cada um recebeu?

b) Agora a divisão da tira precisa ser feita entre Daniel, Guilherme, Anna Jullya e Andressa, de maneira que cada um receba partes iguais. Que peça corresponde a cada uma das partes recebidas? Que fração essa peça representa?

c) As colegas Ruana, Yasmin e Kauana se juntaram ao grupo! Por isso, o inteiro precisa ser distribuído igualmente entre: Daniel, Guilherme, Anna Jullya, Andressa, Ruana, Yasmin e Kauana. Nessa divisão, que fração representa a parte recebida por cada um?

d) Existe no Frac-Soma uma peça que corresponde à parte recebida por cada um dos sete colegas? Por quê?

e) Mais uma colega vai receber as peças agora, a Natiéli. Então, o inteiro precisa ser dividido novamente, agora em oito partes. Que fração representa a parte recebida por Natiéli?

Figura 4.

Atividade envolvendo a distribuição de peças do Frac-Soma[13] *(Acervo pessoal da professora/pesquisadora)*

Constatou-se que os alunos, de imediato, mencionaram que para dividir o inteiro entre duas pessoas, *"[...] precisa cortar a peça do inteiro bem no meio, para dar metade para cada um"* (Aluno D_A30_a, julho, 2022). Ao relacionarem com o recurso, destacaram que *"[...] no Frac-Soma a divisão da peça inteira na metade é feita com essas duas peças* (referindo-se às peças correspondentes a $\frac{1}{2}$)" (Aluno G_A30_a, julho, 2022). Assim, todos os grupos determinaram corretamente as peças solicitadas e os números racionais relacionados (itens A30_a e A30_b).

Ainda em A30, para determinar as respostas solicitadas, todos os grupos realizaram a contagem de quantos alunos eram citados nos enunciados de cada item e, na sequência, identificaram as peças correspondentes do Frac-Soma, determinando, assim, os números racionais envolvidos nas situações. Porém, ao se depararem com o número de sete pessoas a

[13] No enunciado das atividades desenvolvidas, optamos por utilizar a nomenclatura "fração" ao referir-nos ao número racional na representação fracionária, considerando que o Frac-Soma possibilita o trabalho com números racionais não-negativos, bem como o fato de os alunos estarem familiarizados com o uso desse termo.

receberem as peças divididas, os alunos concluíram que *"[...] isso não pode ser feito com as peças que já tem no Frac-Soma porque não existe tira com sete peças. Para fazer a divisão, precisaria cortar esse inteiro em sete partes, onde cada um vai receber $\frac{1}{7}$."* (Aluna A_A30_c_julho, 2022).

Com o objetivo de contemplar a distribuição solicitada e estimular a discussão iniciada em A30, propusemos a atividade 31 (A31 - Figura 5). Para tanto, os alunos receberam uma tira de papel com as mesmas dimensões da peça que representa o inteiro no Frac-Soma, e, por meio dela, deveriam criar uma nova tira. Inicialmente, G1 determinou que *"[...] a nova tira do material precisa ser azul e ter sete peças iguais"* (Aluna F_A31_a_julho, 2022), associando essas características às peças que já compõem o Frac-Soma.

31) Criando novas peças para o Frac-Soma: quando dividimos o inteiro com sete colegas não foi possível identificar peças do Frac-Soma que representasse a parte recebida por cada um:

a) Cite, pelo menos duas, características essa tira do Frac-Soma precisa ter!

b) Agora você vai receber uma tira de papel do mesmo tamanho do inteiro e fará a nova tira do Frac-Soma que você mencionou anteriormente. Como você vai particioná-la?

c) Que fração cada uma dessas peças representa?

d) Qual seria a próxima tira do Frac-Soma que poderia ser confeccionada a partir dessa tira?

Figura 5.

Atividade de confecção de uma nova tira para o Frac-Soma (Acervo pessoal da professora/pesquisadora)

De posse da tira que representa o inteiro, os alunos passaram à tarefa de particioná-la, sem o auxílio de quaisquer instrumentos de medida. Uma discussão sobre as estratégias elaboradas é descrita no episódio a seguir:

> P: Como vocês vão fazer para dividir a peça em sete partes?
> Aluna E_G4: *Eu acho que podemos dobrar a tira assim* (indicando para as dobras a serem feitas sempre ao meio) *e depois cortar. Mas não vai dar sete assim.*
> Aluno G_G2: *Não tem como fazer dobrando no meio. Se dobrar no meio, vai dar um número par de peças, e sete é um número ímpar.*
> P: Alguém tem alguma outra ideia de como podemos fazer a divisão em sete partes?
> Aluno D_G2: *Podemos usar as peças que já tem no Frac-Soma e fazer um pouco menor que essa* (indicando para a peça que representa $\frac{1}{5}$).
> Aluno B_G2: *É mais fácil usar essa outra peça, que é da tira que tem seis, porque vai ficar mais perto da peça com sete. Ou também podemos usar as peças da tira que tem oito.*
> Aluno B_G2: *A peça do sete vai precisar ser maior do que a do seis e menor que a do oito.*

Aluno G_G2: *É ao contrário, porque se ela vai ser maior que a do seis vai ser igual a do* $\frac{1}{5}$.
Aluna A_G1: *E também porque quanto mais peças a tira tem, mais pequena a peça fica, então as peças da tira com sete precisam ser menores que a do seis.*
Aluno G_G2: *É verdade e as novas peças precisam ser menores que as do* $\frac{1}{6}$ *e um pouco maiores que as do* $\frac{1}{8}$.
Aluna A_G1: *E vai dar certo porque o sete vai ser no meio do seis e do oito.*

É possível perceber que os alunos estabaleceram de maneira parcial as noções relativas à partilha/divisão e comparação no decorrer dessa atividade, visto que, mesmo enfatizando aspectos relacionados à comparação entre dois números racionais na representação fracionária, não estabeleceram a ideia de "quanto mais" um número é maior que o outro. Para Lamon (2008), particionamento exige comparação, e para isso, é fundamental que o aluno saiba identificar que $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{6}$, por exemplo, e que compreenda o "quanto mais" um número racional é maior que o outro. No caso do Frac-Soma, a identificação de que um número racional é maior que o outro é visual (qualitativa), já o entendimento de "quanto mais" refere-se à aspectos quantitativos e necessita de noções relativas à equivalência, mobilizando o processo de unitização, o que não foi identificado no diálogo.

Além disso, segundo Lamon (2008), mesmo que os alunos possuam boas estratégias intuitivas para realizar o processo de partilha/divisão, é necessário observar algumas características básicas sobre particionamento:

> A unidade deve ser dividida em partes iguais; - Se uma unidade é constituída por mais do que um item, as partes devem ser do mesmo tamanho; - Igualdade significa de montante igual, mas as ações não têm sempre o mesmo número de peças; - Partes iguais não tem que ter a mesma forma (Lamon, 2008, p. 82, tradução nossa).

No episódio descrito, por meio do particionamento da unidade, os alunos concluíram que quanto maior o número de secções a serem feitas na unidade, menor será o tamanho de cada uma delas. Da mesma maneira, identificamos conclusões de que quanto menor o tamanho de cada uma das partes, maior deverá ser a quantidade de peças para formar o inteiro, aspectos que se direcionam, por meio do particionamento, aos princípios de medição (Lamon,2008). Destacamos que, durante o particionamento, os alunos justificaram suas ações, considerando que uma medida é sempre uma aproximação e, por isso, torna-se possível manipular unidades de medida para torná-las tão precisas quanto forem necessárias.

Assim, ao considerarem os elementos que tinham disponíveis no momento, todos os grupos estabeleceram medidas aproximadas para a peça que representa $\frac{1}{7}$, realizando a partição de maneira razoável. Ao serem questionados sobre a próxima tira a ser confeccionada a partir dessa (A31_d), G2 mencionou que *"[...] a próxima seria a tira com 14 peças, pois é só cortar todas essas no meio* (referindo-se a cada uma das peças de $\frac{1}{7}$)*"* (Aluno G_A31d_julho, 2022). Por outro lado, G4 e os demais grupos não consideraram a ordem de que a próxima tira deveria partir daquela confeccionada, e destacaram que a tira seguinte *"[...] deveria ser com 11 peças no total, porque tem a tira com dez e com doze. Com 11 peças não tem ainda e para fazer podemos usar essas duas."* (Aluna A_A31d_julho, 2022).

A atividade 32 (A32 - Figura 6) foi realizada com o objetivo de considerar a partição das peças, tomando a peça corresponde a $\frac{1}{2}$ como a nova unidade.

32) Vamos continuar dividindo peças do Frac-Soma, agora tomando como base a peça que representa a fração $\frac{1}{2}$.

a) Como podemos dividi-la igualmente entre Guilherme e Vitória?

b) Existe no Frac-Soma alguma peça correspondente a cada parte dessa divisão? Qual é essa peça? Quanto ela representa?

c) E se queremos particionar $\frac{1}{2}$ entre Ana Julia, Kauana e Bryan. É possível?

d) Que fração representa a peça recebida por cada um? Por quê?

e) Quem recebeu a maior peça: Guilherme ou Bryan? Por quê?

Figura 6.

Atividade de partilha/divisão da peça correspondente à $\frac{1}{2}$ (Acervo pessoal da professora/pesquisadora)

Da mesma maneira que nas atividades anteriores, os grupos não encontraram obstáculos para determinar, com auxílio das peças do Frac-Soma, os números racionais solicitados, utilizando o processo de sobreposição de peças associado à partilha equitativa. Assim, embasaram-se na ideia de que *"[...] se dividir a peça do $\frac{1}{2}$ entre dois colegas, é só cortar no meio. Com as peças do Frac-Soma, podemos trocar o $\frac{1}{2}$ por duas peças de $\frac{1}{4}$ e dar uma para cada um"* (Aluno A_A32_b_julho, 2022), e de que *"[...] para dividir a peça do $\frac{1}{2}$ entre três colegas sem cortar, nós encontramos a peça que cabe três vezes nela. Então, trocamos por essas três da tira do $\frac{1}{6}$ e cada um vai receber uma"* (Aluno D_A32_c_julho, 2022). Ao serem questionados sobre qual dos alunos havia recebido a maior peça (A32_e), os grupos determinaram a resposta por meio da sobreposição e comparação entre seus tamanhos, identificando visualmente sem utilizar a noção de equivalência.

Porém, quando indagados sobre "quanto mais" um receberá em relação ao outro, os grupos relutaram em responder. De certo modo, "embora as crianças possam ver rapidamente que um valor é maior ou menor do que o outro, isso leva algum tempo, antes que sejam capazes de quantificar diferenças" (Lamon, 2008, p. 84, tradução nossa). Tal fato destaca dificuldades encontradas pelos alunos no processo de *unitização*, pois não mobilizaram noções de equivalência na comparação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$, por exemplo, ideias fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Por fim, a atividade 33 (A33 - Tabela 4) foi explorada com o intuito de estabelecer divisões nas tiras, bem como comparar quantidades oriundas do particionamento realizado. Dessa forma, inicialmente, deveria ser feita a partilha/divisão de uma tira entre duas crianças e, consequentemente, de duas tiras entre quatro crianças, além de serem estabelecidas relações de equivalência entre os resultados.

Por meio da análise das respostas, concluiu-se que apenas G2 considerou a partilha/divisão de duas tiras entre quatro crianças, de modo a partir cada uma delas ao meio, distribuindo assim metade para cada criança. Os demais grupos partiram cada uma das tiras em quatro partes, distribuindo então duas peças para cada um, ou seja, uma de cada tira. Assim, os grupos divergiram nas respostas de A33_b. G2 afirmou que a parte recebida seria $\frac{1}{2}$ e G1, G3 e G4 mencionaram que seria $\frac{2}{4}$. Porém, ao serem provocados a identificar as peças no Frac-Soma, provenientes do particionamento, e questionados sobre qual das crianças receberia o maior pedaço de tira, todos concordaram que *"[...] elas vão receber o mesmo tamanho, mesmo nesse caso sendo duas peças, quando ficam juntas dão a metade também. Os pedaços recebidos por elas vão ser do mesmo tamanho"* (Aluna A_A33_c_julho, 2022).

Sublinha-se que o particionamento eficiente é uma forma de "comparação mental da quantidade de material a ser dividido com o número de ações. Trata-se de saber que você tem material suficiente para que não fique sem dar a cada pessoa um pouco mais ou fazer um compartilhamento maior" (Lamon, 2008, p. 84, tradução nossa). Os resultados indicam que após intervenções da professora/pesquisadora, os alunos realizam o particionamento de forma eficaz, assim como os participantes da pesquisa de Graça, Ponte e Guerreiro (2021). Entende-se que atividades que valorizam o processo de particionamento são essenciais, pois proporcionam aos alunos elaborarem diferentes estratégias para realizarem a partilha equitativa, bem como associarem a situação a operação de divisão. Em outras palavras, atividades de particionamento permitem que os alunos compreendam que uma "situação de partilha equitativa pode ser representada por uma fração, na qual o numerador (a) representa a quantidade a distribuir, o denominador (b) representa o número de pessoas a quem distribuir e a expressão $\frac{a}{b}$ representa o resultado da partilha" (Graça, Ponte & Guerreiro, 2021, p. 709).

Interpretação operador e as relações com a operação de multiplicação de números racionais

A atividade 39 (A39 - Figura 7) abordou, com as peças do Frac-Soma, noções relativas à determinação de números racionais na representação fracionária a partir de quantidades já estabelecidas, desenvolvendo ideias relacionadas à interpretação operador e, consequentemente, explorou a operação de multiplicação de números racionais na representação fracionária.

39) Obtendo outras peças do Frac-Soma por meio de transformações com a peça $\frac{1}{2}$

a) Quero a metade da peça $\frac{1}{2}$. Como você faria essa representação usando o Frac-Soma? Que fração indica essa metade?

b) Desejo o dobro de $\frac{1}{2}$. Explique como obter essa quantidade com peças do Frac-Soma. Represente numericamente a peça resultante.

c) Me dê o triplo de $\frac{1}{2}$. Como determinar essa quantidade? Que fração ela representa?

d) Se você não tivesse o Frac-Soma, como a transformação anterior poderia ser representada matematicamente? Qual operação numérica deve ser usada nesse processo?

e) Preciso de um terço de $\frac{1}{2}$. Como você pode calcular o valor dessa peça? Vamos escrever no quadro essa relação, incluindo o resultado final!

f) Me entregue a quarta parte de $\frac{1}{2}$. Como você pode indicar essa relação com as peças do Frac-Soma? Que fração corresponde a $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$?

g) Agora quero $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2}$. Que fração está relacionada a essa quantidade? De que maneira você pode determinar $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2}$ sem o Frac-Soma?

Figura 7.

Atividade relativa à interpretação operador por meio de transformações (Acervo pessoal da professora/pesquisadora)

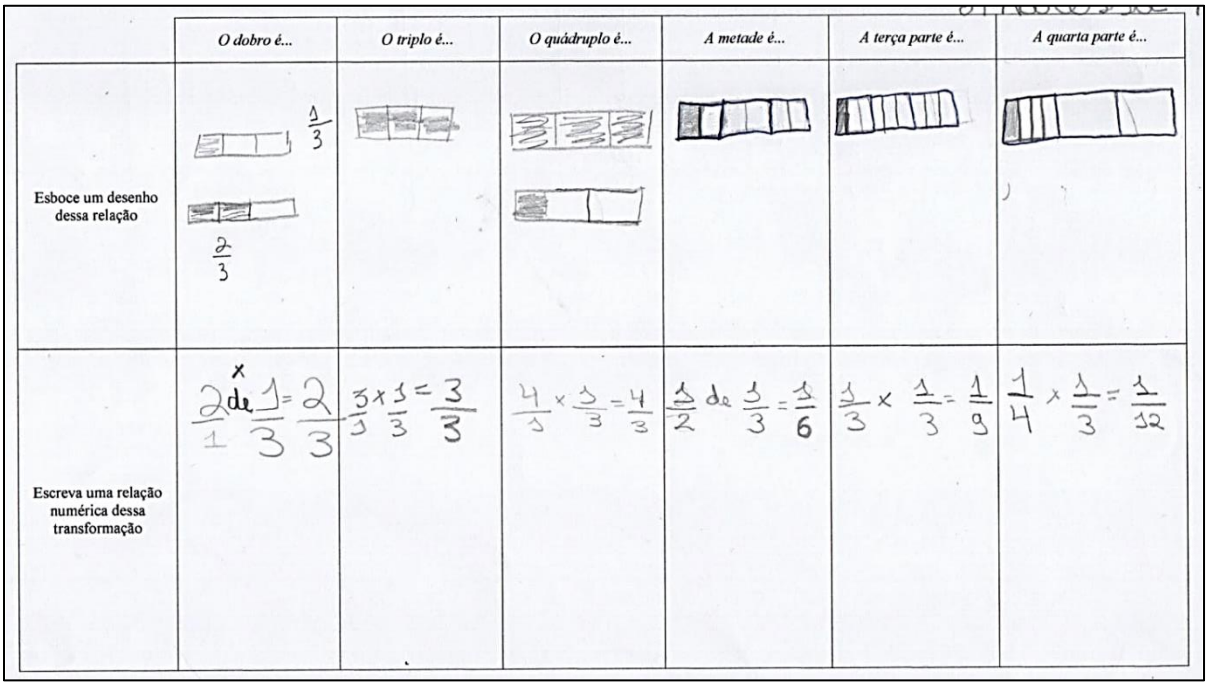
Durante a resolução, os grupos determinaram as quantidades solicitadas em A39_a e A39_b, obtendo, por meio das peças do recurso, a metade e o dobro de $\frac{1}{2}$. Nesse sentido, enfatizaram que a metade seria definida de modo a *"[...] cortar a peça bem no meio. Isso vai ser a mesma coisa que pegar a peça do $\frac{1}{4}$"* e o dobro *"[...] precisa pegar duas peças de um meio"* (Aluna A_A39_agosto, 2022). Para identificar o triplo de $\frac{1}{2}$ (A39_c), os grupos argumentaram que *"[...] precisa de três peças de um meio. E como não tem no Frac-Soma,* *precisamos pegar outra tira do inteiro e cortar no meio. Isso vai deixar a tira maior que o inteiro"* (Aluno G_A39_agosto, 2022). Ao serem questionados sobre o número racional associado a essas peças, o Aluno G enfatizou que *"[...] como vão ser três peças de $\frac{1}{2}$, a fração do triplo vai ser $\frac{3}{2}$"* (Aluno G_A39_c_agosto, 2022). Diante dos argumentos apresentados, percebe-se o processo de particionamento na fala do aluno, quando ele diz "cortar" para obter a metade de $\frac{1}{2}$. Entretanto, não fica explícito nas falas que houve a compreensão de que se estão tomando partes das partes de um inteiro. Ainda, nessa atividade, há indícios da compreensão de aspectos relativos à interpretação operador, ao identificarem as transformações (ampliação) ocorridas na obtenção do dobro e do triplo de $\frac{1}{2}$. Esse entendimento fica explícito durante a realização do item d), em que os alunos foram provocados a estabelecerem uma relação matemática que justificasse o número racional obtido, bem como a operação relativa à transformação realizada, quando o aluno G menciona que assumir o triplo de $\frac{1}{2}$ é *"[...] a mesma coisa que fazer três vezes o um meio, que vai dar três meios"* (Aluno G_A39_agosto, 2022), procedimento que foi corroborado pelos demais alunos da turma e confirmado durante a discussão para resolução do item e):

> Aluno D_G2: *Para fazer o triplo era mais fácil, era só pegar três peças do $\frac{1}{2}$. Agora, essa, eu achei mais difícil.*
> P: E se pensarmos no que já foi feito? [...] como vocês determinaram a metade do $\frac{1}{2}$?
> Aluno D_G2: *Foi só cortar no meio.*
> P: E você cortou a peça ao meio?
> Aluno D_G2: *Não. Nós trocamos a $\frac{1}{2}$ por duas de $\frac{1}{4}$ porque uma peça de um quarto dá a metade.*
> P: Então se quisermos agora a terça parte do $\frac{1}{2}$ como poderíamos fazer essa troca?
> Aluno G_G2: *Precisa achar três peças que completam o $\frac{1}{2}$.*
> Aluna A_G1: *[...] três peças da tira do $\frac{1}{6}$ cabem certo no $\frac{1}{2}$.*
> Aluno G_G2: *[...] como queremos só um terço, a resposta vai ser uma peça só. A resposta vai ser $\frac{1}{6}$.*

Assim como no item a), verificamos que os alunos realizaram o processo de particionamento para obter o resultado desejado. Porém, ainda não há indícios de que eles compreendem ideias relacionadas a interpretação operador; em outros termos, não há percepção de que ao tomar uma peça que caiba três vezes no $\frac{1}{2}$, esta peça caberá 6 vezes no inteiro. Ao particionar/trocar as peças há uma "perda" da referência da unidade.

Os itens e), f) e g) da atividade A39 foram retomados com o grande grupo de modo a explorar regularidades nas respostas, a partir da representação numérica. Quando provocados a observarem as relações entre os números racionais na representação fracionária, os alunos perceberam que *"[...] o resultado é a resposta dos números de cima quando fazemos a multiplicação, e os de baixo também"* (Aluno D_A39_g_agosto, 2022). Verifica-se que, mesmo não tendo sido explorada a operação de multiplicação de dois números racionais na representação fracionária, os alunos perceberam que existia relação de multiplicidade entre os numeradores e os denominadores.

A atividade 40 (A40 - Figura 8), assim como A39, explorou transformações de ampliação e redução relativas, agora, à peça que corresponde a $\frac{1}{3}$.



	O dobro é...	O triplo é...	O quádruplo é...	A metade é...	A terça parte é...	A quarta parte é...
Esboce um desenho dessa relação	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$					
Escreva uma relação numérica dessa transformação	$\frac{2}{1}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$	$\frac{4}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Figura 8.

Protocolo de G1 em A40 (Acervo pessoal da professora/pesquisadora)

O protocolo (Figura 8) mostra que diferentes alunos responderam a cada uma das alternativas de A40. Assim, percebem-se notações diferentes na representação numérica, bem como representações figurais que revelam entendimentos distintos. Nas "relações numéricas" para o dobro e a metade, os alunos que responderam indicaram o termo "*de*", "trocando-o" pelo símbolo de multiplicação. Na "relação numérica", os demais alunos do grupo associaram o processo realizado com as peças do Frac-Soma à operação de multiplicação. Na representação figural, verificam-se alguns indícios da compreensão da interpretação operador. Porém, constatam-se algumas dificuldades já mencionadas (em A39), a "perda" de referência da unidade explicitada na representação figural da quarta parte, em que se verifica a divisão em três partes da unidade; entretanto, somente uma das três partes é dividida em quatro partes.

A atividade 41 (A41 - Figura 9), além do que já havia sido trabalhado em A39 e A40, explora também a noção de comparação. Para isso, os alunos receberam duas tiras de papel com as mesmas dimensões da peça que representa o inteiro do Frac-Soma.

41) Agora você vai receber duas tiras de papel do mesmo tamanho da peça que representa o inteiro:

a) Na primeira tira você deve dobrar e recortar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$. Que fração essa parte representa?

b) Na segunda tira, represente com uma peça a quantidade $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$. Que fração ela representa?

c) Que fração é maior?

Figura 9.

Relações de partilha e comparação a partir da interpretação operador (Acervo pessoal da professora/pesquisadora)

Ao analisarmos os diálogos e os protocolos dos alunos, constatamos que foram realizadas duas formas de resolução dos itens a) e b). Uma delas utilizou da estratégia de dividir, por exemplo, a unidade em seis partes, e depois, uma parte das seis ao meio, verificando que a peça $\frac{1}{12}$ soluciona o problema, sem preocupação com a unidade. A outra utilizou as regularidades percebidas na representação numérica, multiplicando $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{6}$ obtendo, assim, $\frac{1}{12}$ e buscando a peça correspondente no Frac-Soma. A partir disso, houve a necessidade de retomada, com o grande grupo, do conjunto de instruções necessário à execução do processo, verificando, com o uso do material manipulável, como ocorre a transformação de quantidades em outras. Ao serem estimulados a realizar a comparação entre os números racionais correspondentes as peças criadas (A41_c), todos os grupos concluíram de imediato que estas seriam iguais, uma vez que possuíam o mesmo tamanho.

Por fim, destacamos que a sequência envolvia mais quatro atividades, semelhantes as anteriormente apresentadas, relacionadas à interpretação operador. Nessas atividades evidenciou-se um avanço na compreensão da interpretação operador, em particular, nas transformações que resultavam em reduções da quantidade inicial dada.

Considerações finais

O presente estudo teve por objetivo analisar entendimentos de alunos do 7º ano do ensino fundamental ao resolverem atividades que enfatizam as interpretações do número racional quociente e operador. Por meio da análise dos dados obtidos na pesquisa, percebemos que as noções relativas à partilha justa/divisão equitativa foram estabelecidas pelos grupos, pois os alunos estabeleceram conexões entre as quantidades solicitadas e o processo de particionamento, processo este necessário à compreensão da interpretação quociente e ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Ao estabelecerem tais conexões, os grupos compreenderam que uma situação de partilha justa/divisão equitativa pode ser representada por um número racional na representação fracionária, $\frac{a}{b}$, em que a se refere a quantidade a ser distribuída e b a quantidade de pessoas que receberão tais partes.

Por outro lado, mais do que seccionar unidades, é extremamente importante que a noção de comparação seja compreendida. Esta, por sua vez, foi uma das dificuldades apresentada pelos alunos. Observamos que as comparações realizadas pelos alunos ocorreram de modo visual, ou seja, foram feitas comparações a partir do tamanho das peças do Frac-Soma, não sendo considerados aspectos quantitativos dos números associados a elas. De modo a superar essas dificuldades e promover a comparação de forma quantitativa, tornou-se necessário, durante as intervenções da professora/pesquisadora, enfatizar o processo de unitização, o que contribuiu para a compreensão da noção de equivalência, essencial no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Outro aspecto relevante identificado por meio das resoluções refere-se ao fato de que os grupos estabeleceram, ao realizar o particionamento da unidade, ideias relativas à medição, uma vez que destacaram que quanto maior o número de secções a serem feitas na unidade, menor seria o tamanho de cada uma delas, e vice-versa. Isso condiz com o que Lamon (2008) enfatiza sobre a interpretação medida, a qual desempenha um papel importante na compreensão dos números racionais e das estruturas associadas ao raciocínio multiplicativo.

Ao considerar a interpretação operador, os grupos realizaram processos de particionamento, na busca pelos resultados e transformações solicitados. Destaca-se que, na ação de particionar o inteiro, bem como "trocar" peças do Frac-Soma por outras, ocorreu "perda" da referência da unidade. Entretanto, após as intervenções da professora/pesquisadora, a análise dos protocolos revelou indícios que remetem à compreensão da interpretação operador, principalmente, no que se refere ao entendimento de operador como uma função capaz de transformar a unidade em outra semelhante. Assim, pôde-se concluir que os alunos apresentaram entendimentos sobre essas interpretações do número racional, embora as noções de operador e comparação ainda seja um desafio para alguns.

Por fim, cabe enfatizar que é difícil propor situações em que apenas uma interpretação seja mobilizada pelos alunos, em particular, quando se utiliza o Frac-Soma, pois elas encontram-se interligadas. Desta forma, entende-se ser de extrema importância que o trabalho com os números racionais seja realizado de modo a contemplar situações características de cada uma das intepretações, considerando os conhecimentos e possibilidades a elas associadas.

Referências

Baldino, R. R. (1983). *Material Concreto:* Frac – Soma 235. Casquinha – Material de Apoio Pedagógico. Bicudo, M. A. V. (2012). A pesquisa em Educação Matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *5*(2), (mai-ago), 15-26.

Borba, M.C & Araújo, J. L. (2019). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Editora Autêntica.

Cyrino, M. C. C. T.; Garcia, T. M. R.; Oliveira, L.; Rocha, M. R. (2014). *Formação de Professores em Comunidades de Prática:* frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 37-63, 2014.

Graça, S. I., Ponte, J. P. da & Guerreiro, A. (2021). Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo…! *Revista Educação Matemática Pesquisa. 23*(1), 683-712.

Lamon, S. J. (2008). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding:* Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge.

Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). Raciocínio Proporcional = Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (orgs.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Reston: Lawrence Erlbaum/National Council of Teachers of Mathematics.

Maranhão, C., Machado, S. (2011). Uma Meta-Análise de Pesquisas sobre o Pensamento Proporcional. *Educar em revista* (n. especial), 141-156.

Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. *Boletim de Educação Matemática (Bolema),* 22(34), 57-80.

Oliveira, L. M. C. P. de. (2014). *Aprendizagens no Empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/OLIVEIRA-Lais-Maria-Costa-Pires-de.pdf

Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2008). As diferentes "Personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. *Boletim de Educação Matemática (Bolema), 21*(31), 79– 102.

Silva, M. J. F. da & Almouloud, S. A. (2018). Números racionais: concepções, representações e situações. In G. P. Oliveira. *Educação Matemática epistemologia, didática e tecnologia*. Editora da Livraria da Física.

Sores, M. A. da S. (2016). *Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática***:** uma análise de materiais que expressam fases do currículo da Educação Básica [Tese de doutorado em Educação nas Ciências, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul]. http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/4963