ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i3p025-053

Integrais definidas de uma variável: uma proposta de intervenção com tarefas exploratórias.

Definite integrals of one variable: an intervention proposal with exploratory tasks.

Integrales definidas de uno variable: una propuesta de intervención con tareas exploratorias.

Intégrales définies d´une variable : une proposition d'intervention avec des tâches exploratoires.

Tainá Taiza de Araujo[1]
Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná - SEED/PR
Mestre em Ensino de Matemática
https://orcid.org/0000-0002-1798-1074

André Luis Trevisan[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática
https://orcid.org/ 0000-0001-8732-1912

Resumo

Considerando as dificuldades que alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral têm em compreender o conceito de integral definida de uma variável, este artigo tem por objetivo investigar a elaboração e a implementação de uma proposta de intervenção, a partir do trabalho com episódios de resolução de tarefas, que ofereça aos estudantes oportunidades para explorar esse conceito. Discutimos, como fundamentação teórica, a importância das integrais de Riemann e somas de base multiplicativa na compreensão das integrais definidas. Apresentamos uma caracterização da metodologia utilizada em nossa pesquisa, assim como do contexto de intervenção e coleta de dados. A análise das discussões realizadas em pequenos grupos acerca de duas tarefas exploratórias é baseada em um referencial que trata das camadas do conhecimento, no que diz respeito à compreensão do conceito de integrais definidas. Como resultados, pudemos inferir que com as tarefas exploratórias os estudantes puderam explorar substancialmente o conceito de soma de base multiplicativa presente na soma de Riemann, em relação às camadas do produto, da soma e do limite.

Palavras-chave: Ensino de cálculo diferencial e integral, Integrais de Riemann, Camadas do conhecimento, Episódios de resolução de tarefas.

[1] taina.taiza.araujo@gmail.com
[2] andreluistrevisan@gmail.com

Abstract

Considering the difficulties that students in the Differential and Integral Calculus discipline have in understanding the concept of a defined integral of a variable, this article aims to investigate the elaboration and implementation of an intervention proposal, based on work with problem solving episodes. tasks, which offers students opportunities to explore this concept. We discuss, as a theoretical foundation, the importance of Riemann integrals and multiplicative base sums in understanding definite integrals. We also provided a characterization of the methodology used in our research, as well as the context of intervention and data collection. The analysis of discussions held in small groups about two exploratory tasks is based on a framework that deals with layers of knowledge, with regard to understanding the concept of defined integrals. As a result, we were able to infer that with the exploratory tasks students were able to substantially explore the concept of multiplicative base sum present in the Riemann sum, in relation to the product, sum and limit layers.

Keywords: Teaching differential and integral calculus, Riemann integrals, Layers of knowledge, Task solving episodes.

Resumen

Considerando las dificultades que tienen los estudiantes de la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para comprender el concepto de integral definida de una variable, este artículo tiene como objetivo investigar la elaboración e implementación de una propuesta de intervención, basada en el trabajo con episodios de resolución de tareas, que ofrece a los estudiantes oportunidades para explorar este concepto. Discutimos, como fundamento teórico, la importancia de las integrales de Riemann y las sumas de bases multiplicativas para comprender las integrales definidas. También proporcionamos una caracterización de la metodología utilizada en nuestra investigación, así como el contexto de intervención y recolección de datos. El análisis de las discusiones mantenidas en grupos pequeños sobre dos tareas exploratorias se basa en un marco que aborda capas de conocimiento, con respecto a la comprensión del concepto de integrales definidas. Como resultado, pudimos inferir que con las tareas exploratorias los estudiantes lograron explorar sustancialmente el concepto de suma base multiplicativa presente en la suma de Riemann, en relación con las capas producto, suma y límite.

Palabras clave: Enseñanza de cálculo diferencial e integral, Integrales de riemann, Capas de conocimiento, Episodios de resolución de tareas.

Résumé

Compte tenu des difficultés qu'éprouvent les étudiants de la discipline Calcul différentiel et intégral à comprendre le concept d'intégrale définie d'une variable, cet article vise à étudier l'élaboration et la mise en œuvre d'une proposition d'intervention, basée sur le travail avec des épisodes de résolution de problèmes. Elle offre aux étudiants la possibilité d'explorer ce concept. Nous discutons, comme fondement théorique, de l'importance des intégrales de Riemann et des sommes de base multiplicatives dans la compréhension des intégrales définies. Nous avons également fourni une caractérisation de la méthodologie utilisée dans notre recherche, ainsi que le contexte d'intervention et de collecte de données. L'analyse des discussions tenues en petits groupes autour de deux tâches exploratoires s'appuie sur un cadre qui traite des couches de connaissances, en ce qui concerne la compréhension du concept d'intégrales définies. En conséquence, nous avons pu déduire qu'avec les tâches exploratoires, les étudiants ont pu explorer de manière approfondie le concept de somme de base multiplicative présent dans la somme de Riemann, en relation avec les couches produit, somme et limite.

Mots-clés: Enseignement du calcul différentiel et intégral, Intégrales de Riemann, Couches de connaissances, Épisodes de résolution de tâches.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), em nível tanto nacional quanto internacional, tem registrado há várias décadas altos índices de reprovação e desistência, tanto em cursos de disciplinas ditas “duras”, como Matemática e Física, quanto em cursos de Engenharia (Silva, 2013; Zarpelon, 2022). Um dos motivos para altos índices de desistência está relacionado ao “como” a disciplina de CDI geralmente tem sido abordada nas universidades.

> Tradicionalmente, as disciplinas matemáticas, tanto na Educação Básica quanto (e principalmente) no Ensino Superior, são “cartesianas”, sustentadas pelo tripé *definição exemplo-exercício*, seguido de uma avaliação acumulativa que prioriza a reprodução de procedimentos. Um dos efeitos gerados por essa tradição é tornar essas disciplinas, na visão dos estudantes, maçantes e algorítmicas, sem objetivos e desmotivadoras, principalmente para cursos de engenharia. (Couto, Fonseca & Trevisan, 2017, p. 51).

Defendemos que ambientes de ensino e de aprendizagem que difiram dos métodos tradicionais se fazem necessários no âmbito de disciplinas matemáticas no Ensino Superior, já que oportunizam aos estudantes o protagonismo, potencializando a compreensão de conceitos matemáticos (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan, Alves & Negrini, 2021; Trevisan, 2022). Concordamos com Souza e Fonseca (2017, p.198) que o ensino de disciplinas matemáticas em nível Superior, em “sua vasta colaboração com a formação dos indivíduos, deve estar atrelado a abordagens metodológicas que favoreçam o enfrentamento de problemas reais que farão parte da prática profissional dos estudantes”.

Uma abordagem possível, nessa direção, envolve a utilização de tarefas exploratórias (Ponte, 2005), com característica mais aberta, que podem ser resolvidas de forma intuitiva, sem que uma definição formal tenha sido apresentada anteriormente, motivando os estudantes a pensarem de forma autônoma e, pelas ações de intervenção do professor, explorar conceitos matemáticos, e não apenas reproduzi-los. Prioriza-se assim o trabalho colaborativo (Granberg & Olsson, 2015), oportunizando a interação entre os pares, de modo que a fala de um aluno pode contribuir para a mudança das hipóteses do outro, em casos em que o aluno possa seguir um caminho improcedente.

No que tange ao conceito de Integral de Riemann via Somas de Riemann, foco deste trabalho, seu entendimento é necessário para compreender problemas que estão inseridos não apenas na Matemática, mas principalmente em Ciências subsequentes (Haddad, 2013). Entretanto, muitos alunos, mesmo após concluírem a disciplina de CDI, não têm um entendimento desse conceito e, possivelmente, veem essas somas apenas em procedimentos iniciais para se encontrar um valor aproximado de uma integral definida, sendo, posteriormente, substituídas pela estratégia de resolução de integral definida por antiderivação, em articulação com a apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo.

Segundo Jones, Lim e Chandler (2017, p. 1076, tradução nossa),

> [...] vários estudos recentes demonstraram claramente que os alunos de Cálculo muitas vezes têm dificuldades em usar o conceito de integração tanto nos cursos de Matemática quanto em cursos de ciências subsequentes [...]. Ao estudar essas dificuldades dos alunos e suas razões, há um reconhecimento de que as ideias contidas na estrutura de soma de Riemann são importantes para uma robusta compreensão da integração definida.

Este artigo, recorte da dissertação da primeira autora, tem por objetivo investigar a elaboração e a implementação de uma proposta de intervenção, a partir do trabalho com episódios de resolução de tarefas, que ofereça aos estudantes de CDI oportunidades para explorar o conceito de integral de uma variável. No intuito de alcançar o objetivo, como base teórica para o planejamento da intervenção, consideramos os conceitos de camadas do conhecimento associadas ao conceito de integral definida (Sealey, 2006, 2014), atreladas à ideia de Somas de Base Multiplicativa (Jones, Lim & Chandler, 2017) que serão detalhados na próxima seção.

Fundamentação teórica

A integral definida é um conceito fundamental da disciplina de CDI, utilizado na resolução de problemas variados tanto na Matemática quanto no contexto de outras ciências, incluindo a Engenharia. Entretanto, segundo Jones (2013, p. 123, tradução nossa), "pesquisadores notaram a percepção entre os educadores de que os alunos em transição para cursos de ciências estão rotineiramente se empenhando para aplicar seus conhecimentos matemáticos ao domínio das ciências". Para o autor, os estudantes apresentam dificuldade em utilizar o conceito de integral definida, tanto no contexto da matemática, quanto no das ciências aplicadas, já que ele possui várias facetas em sua estrutura e muitas formas de interpretação.

> Algumas razões para essas dificuldades podem ser uma dependência excessiva de representações algébricas de função (Rubio & Gómez-Chacón, 2011), uma falta de compreensão da estrutura da soma de Riemann (Orton, 1983; Sealey, 2014), uma má compreensão das taxas de mudança e acumulação (Thompson, 1994; Thompson & Silverman, 2008), e lutas para objetivar a acumulação como uma função (Kouropatov & Dreyfus, 2014; Swidan & Yerushalmy, 2014; Yerushalmy & Swidan, 2012). (Jones, Lim & Chandler, 2017, p. 1076, tradução nossa).

Sealey (2006) destaca em seu trabalho razões que tornam o estudo da Soma de Riemann substancial para uma compreensão robusta de integrais definidas. Uma delas é o fato de que

“[...] muitas aplicações do mundo real envolvem funções que não possuem uma primitiva que possa ser expressa em termos de funções elementares” (Sealey, 2006, p. 46, tradução nossa). Outra razão é que, apesar da Soma de Riemann não ser o método mais rápido para aproximar o valor de uma integral definida,

> [...] outros métodos, como a regra do trapézio, a regra do ponto médio ou o método de Simpson, são baseados na estrutura da soma de Riemann. Assim, uma compreensão da estrutura das somas de Riemann ajudará os alunos a entenderem esses outros métodos também. Finalmente, suponho que uma compreensão das somas de Riemann é necessária mesmo quando uma função tem uma primitiva que pode ser expressa em termos de funções elementares. Configurar a integral definida apropriada requer que o aluno saiba o que integrar, e uma compreensão da estrutura da soma de Riemann dará ao aluno as ferramentas de que precisa. (Sealey, 2006, p. 46, tradução nossa).
> Ainda sobre esse tema, Jones, Lim e Chandler (2017, p. 1076, tradução nossa)

Esses autores destacam que, ao “estudar essas dificuldades dos alunos e suas razões, há um reconhecimento de que as ideias contidas na estrutura da soma de Riemann são importantes para uma robusta compreensão da integração definida (Artigue, 1991; Blomhøj & Kjeldsen, 2007; Sealey, 2014)”. Assim, realizar manipulações algébricas e “resolver” uma integral definida não é suficiente para que o estudante seja capaz de usar integrais como ferramenta para resolver problemas, sendo fundamental uma compreensão da estrutura de soma de base multiplicativa da Soma de Riemann. Uma soma de base multiplicativa (MBS - *Multiplicatively Based Summation*) é definida a partir de dois elementos:

> (1) a relação multiplicativa entre o integrando e o diferencial [de uma integral definida] para criar um produto resultante, e (2) a ideia de resumir pequenas quantidades (possivelmente infinitesimalmente pequenas) do produto resultante em pequenos pedaços do domínio (possivelmente infinitesimalmente pequenos) para capturar a quantidade total dessa quantidade (Jones, Lim & Chandler, 2017, p. 1076, tradução nossa).
> De forma mais detalhada, Jones (2015) discute uma MBS a partir da
> [...] ideia de dividir o domínio em infinitas seções infinitesimalmente pequenas, cada uma representada pelo diferencial, “dx”. [...] Um componente-chave dessa concepção é que uma única peça, chamada de retângulo representativo (para o caso de variável única), é usada para conceituar a relação multiplicativa entre as quantidades representadas pelo integrando e o diferencial. Este produto produz uma quantidade infinitesimalmente pequena de uma quantidade resultante. A quantidade resultante é então somada (ou acumulada) em todas as infinitas seções do domínio para obter a quantidade total. (Jones, 2015, p. 156, tradução nossa).

De modo similar, Thompson e Silverman (2008, p. 4) destacam que uma “Soma de Riemann é obtida por uma soma de pedaços incrementais, cada um dos quais é obtido combinando multiplicativamente duas quantidades, representando uma quantidade total da quantidade resultante cujos pedaços são definidos por $f(c).\Delta x, c \in [x, x + \Delta x]$”. Os autores apresentam um exemplo no contexto do cálculo do trabalho exercido por uma força em um intervalo de deslocamento para exemplificar.

> Entender a ideia de trabalho realizado, por exemplo, como um acréscimo incremental significa que devemos pensar em cada quantidade total momentânea de trabalho como a soma de incrementos passados, e em cada trabalho incremental adicional como sendo composto de uma força aplicada através de uma distância. (Thompson & Silverman, 2008, pp. 1, tradução nossa)

Assim, se considerarmos a força variável durante o deslocamento, o valor do trabalho realizado por essa força pode ser inicialmente aproximado pelo somatório do produto da força pelo deslocamento (uma MBS), considerando os subintervalos de deslocamento infinitesimalmente pequenos. Tal ideia está presente em vários outros contextos, como é o caso do cálculo da massa de uma haste no qual assumimos que, para calcular a massa em subintervalos infinitesimalmente pequenos, efetuamos o produto de uma densidade representativa em cada subintervalo pelo comprimento do subintervalo. Esta relação é usada para conceituar a relação multiplicativa entre as quantidades representadas pela integral e pelo diferencial. Este produto produz uma quantidade infinitesimalmente pequena de uma massa resultante. A massa resultante é então somada (ou acumulada) em todos os infinitos subintervalos do domínio para obter a massa total da haste.

Com a intenção de investigar como os estudantes de CDI compreendem uma MBS, Sealey (2014) investigou seu envolvimento com problemas de contexto físico e sugeriu uma estrutura de quatro camadas. A ideia de camadas do conhecimento (*layer*, no original em inglês) é baseada na decomposição da Integral de Riemman proposta nos trabalhos de Sealey (2008, 2014). A autora propõe um *Framework* (Tabela 1) organizado em quatro camadas correspondentes às operações envolvidas no cálculo de uma Integral de Riemman, a saber: produto, soma, limite e função.

Tabela 1.

Camadas da estrutura de uma integral de Riemann (Adaptado de Sealey, 2014, p. 234)

Camada	Representação simbólica
Produto	$\left[\frac{1}{c} \cdot f(x_i)\right] \cdot [c \cdot \Delta x]$
Soma	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Limite	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Função	$f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

A primeira camada da estrutura Integral de Riemann, a Camada do Produto, "é composta pela multiplicação de duas quantidades, $f(x_i)$ e Δx, onde $f(x_i)$ pode ser conceituada como uma taxa e Δx como uma diferença" (Sealey, 2014, p. 231, tradução nossa). Já a camada da soma inclui adicionar todas as infinitas peças do produto de $f(x_i)$ por Δx, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. A terceira camada, por sua vez, envolve o limite "[...] à medida que n se aproxima do infinito das duas camadas anteriores, dando-nos a integral de Riemann" (Sealey, 2014, p. 231, tradução nossa).

Finalmente, "a quarta camada permite considerar a integral definida como uma função em que a entrada é o limite superior (ou seja, o ponto final direito) do intervalo sobre o qual a função é integrada, e a saída é o valor numérico da integral definida" (Sealey, 2014, p.232, tradução nossa).

Embora isso não seja algo trivial, compreender a estrutura da integral baseada na função de acumulação pode gerar a oportunidade para que os estudantes aprendam integração e sejam capazes de aplicá-la de forma substancial. Para que isso aconteça, os estudantes precisam "(a) ver a área sob uma curva como representando o acúmulo de quantidade e não necessariamente uma área, e (b) fazer a conexão entre a derivada e a integral" (Swidan & Yerushalmy, 2016, p. 31, tradução nossa).

Pressupostos e planejamento da intervenção

Este trabalho se enquadra em uma sequência de investigações sobre o ensino de CDI na perspectiva do trabalho com episódios de resolução de tarefas exploratórias, desenvolvidas no âmbito do grupo de pesquisa que os autores integram (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan, Alves & Negrini, 2021; Trevisan, 2022).

Apoiamo-nos na definição de tarefa proposta por Ponte (2005. p. 1):

> Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade. A tarefa pode surgir de diversas maneiras: pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno. Além disso, a tarefa pode ser enunciada explicitamente logo no início do trabalho ou ir sendo constituída de modo implícito à medida que este vai decorrendo.

De acordo com o autor, uma tarefa pode ser caracterizada de várias maneiras e sua estrutura se dará conforme o objetivo do professor. Em oposição às tarefas com estrutura fechada (chamadas exercícios), as tarefas exploratórias são abertas e com grau de desafio mediano. O trabalho com esse tipo de tarefa é "mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles [os estudantes] descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar" (Ponte, 2005, p.9).

Esta perspectiva de trabalho encontra respaldo nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019), ao destacar a necessidade de proporcionar aos estudantes, ao longo da formação, o desenvolvimento de algumas competências gerais, e uma delas inclui:

> analisar e compreender os fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos, físicos e outros, verificados e validados por experimentação: a) ser capaz de modelar os fenômenos, os sistemas físicos e químicos, utilizando as ferramentas matemáticas, estatísticas, computacionais e de simulação, entre outras. b) prever os resultados dos sistemas por meio dos modelos; c) conceber experimentos que gerem resultados reais para o comportamento dos fenômenos e sistemas em estudo. (Brasil, 2019, p.2).

Nesse sentido, em um curso de graduação em Engenharia, espera-se que um aluno que cursa CDI seja capaz de utilizar a Matemática estudada nessa disciplina para modelar soluções no contexto de outras ciências, incluindo fenômenos físicos e químicos. Assim, reforça-se a importância de planejar uma intervenção que possibilite aos alunos, de fato, compreenderem os conceitos do CDI, estabelecendo as relações e conjecturas necessárias para resolverem problemas dentro do seu contexto de estudo e, futuramente, no exercício da profissão.

A aprendizagem, neste contexto de trabalho, assume característica colaborativa, uma vez que "[...] encoraja a participação do estudante no processo de aprendizagem e que faz da aprendizagem um processo ativo e efetivo" (Torres, Alcântara & Irala, 2004, p. 131). O trabalho colaborativo permite que as hipóteses dos alunos sejam questionadas, incentivando a reflexão e possibilitando sua validação com argumentos sólidos ou sua refutação, caso sejam inconsistentes ou falsas. Nesse processo, os colegas do grupo oferecem suporte e auxiliam na construção do conhecimento. Além disso, essa abordagem contribui para "preparar seus alunos de forma mais efetiva para os desafios encontrados fora do âmbito escolar" (Torres, Alcântara & Irala 2004, p. 135).

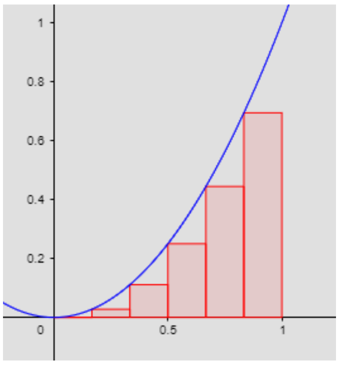
O papel do professor, em aulas estruturadas em resolução de tarefas exploratórias e trabalho colaborativo, é de direcionar os alunos em suas discussões de modo que consigam alcançar os objetivos de aprendizagem. Então, é indispensável que o professor conheça seus alunos e elabore tarefas exploratórias que promovam a discussão entre os pares e a aprendizagem.

A intervenção foi planejada para turmas de Engenharia nas quais o primeiro autor atuava como professor de CDI 2 no ano de 2022. Como esses estudantes haviam cursado CDI I de forma remota devido à pandemia da COVID-19, Observou-se a necessidade de revisitar o conceito de integral definida de uma variável antes de avançar para o estudo de integrais de mais de uma variável.

Elaboramos duas tarefas exploratórias, cada uma delas proposta para ser resolvida em pequenos grupos, em uma aula de 50 minutos. Depois, foram utilizadas duas aulas de 50 minutos para realizar a discussão das resoluções dos alunos sobre as tarefas e a sistematização dos conceitos do significado e estrutura da Soma de Riemann e da Integral de Riemann.

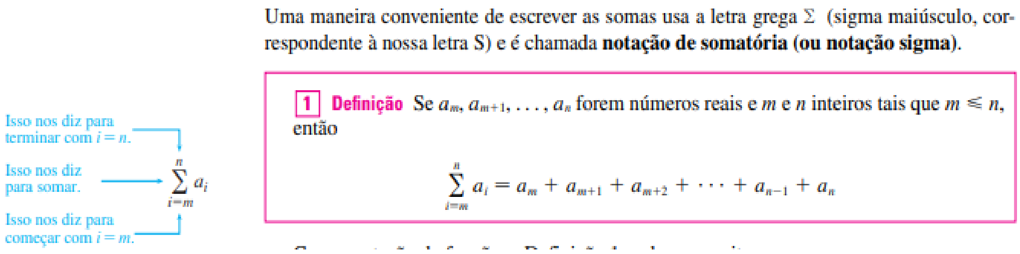
A tarefa exploratória 1 tinha, por objetivo, resgatar a ideia de soma acumulada de área sob uma curva, notação de somatório, estrutura de um somatório, representação gráfica de um somatório, cálculo de uma integral definida e a relação existente entre a integral e o cálculo da área abaixo de uma curva, limitada por retas e o eixo x. Além disso, buscou-se promover uma compreensão intuitiva, pertencente à Camada do Limite, de que, ao se aumentar o número de retângulos, a soma das áreas aproxima-se cada vez mais do valor exato da área sob a curva. Esta tarefa foi inspirada em trabalhos anteriores do grupo de pesquisa (Trevisan & Goes, 2016, 2017; Borssoi & Silva, 2020) e, para sua realização, foi destinada uma aula de 50 minutos.

Tarefa exploratória 1



Considere a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

1. Suponha que a região seja preenchida por alguns retângulos, como na figura ao lado, todos com a mesma base.
(a). Quanto mede essa base?
(b). Qual a altura de cada um dos retângulos?
(c). Calcule a área aproximada da região usando esses retângulos.
2. Leia a definição abaixo.


Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação de somatória (ou notação sigma)**.

1 Definição Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n inteiros tais que $m \leqslant n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

a) Represente, em notação de somatório, o cálculo realizado no item (c) da questão anterior.
b) Represente no Geogebra, pelo link https://www.geogebra.org/m/PnRNynS8 uma figura que ilustre $\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8} f(x_i)$ e indique o valor desse somatório usando uma soma inferior e depois uma soma superior. Tire print da sua solução e envie por Whatsapp.
3. Determine o valor exato da área da região utilizando conhecimentos do Cálculo.
4. Que relações você estabelece entre os valores obtidos nas questões (1) e (2), e o valor obtido no item (3)?

A tarefa exploratória 2, planejada para uma aula de 50 minutos, teve por objetivo, por meio de um contexto físico, resgatar a estrutura multiplicativa presente em uma soma de Riemann e, a partir disso, definir uma integral de Riemann de uma variável, proporcionando aos alunos a oportunidade de compreender a integral definida como o limite de uma soma de base multiplicativa, e não somente como “área sob a curva”. Com isso, a tarefa oportuniza a mobilização das camadas da soma, do produto e do limite que compõem a estrutura conceitual da integral de Riemann.

Tarefa exploratória 2

O termo trabalho é usado na linguagem cotidiana significando a quantidade de esforço necessário para executar uma tarefa. Na Física esse termo tem um significado técnico que depende do conceito de força. Intuitivamente, você pode pensar em força como descrevendo um empurrar ou puxar um objeto. Em geral, se um objeto se move ao longo de uma reta com função posição $s(t)$, então a força F sobre o objeto (na mesma direção) é definida pela Segunda Lei de Newton do Movimento como o produto de sua massa m pela sua aceleração a: $F = ma$

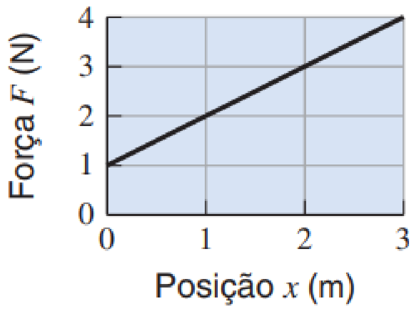
No caso de aceleração constante, a força F também é constante, e o trabalho é definido como o produto da força F pela distância que o objeto percorre, ou sua variação de posição Δs:
$W = F \cdot \Delta s$

1. Quanto trabalho é exercido ao se levantar um livro de $1{,}2kg$ do chão até uma carteira de altura $0{,}7m$? Considere que a aceleração da gravidade é $g = 9{,}8m/s^2$.

2. A equação anterior define trabalho desde que a força seja constante. Mas o que acontece se a força for variável? Imagine agora um contexto na qual a força $F(x)$ é variável ao longo do eixo x no sentido positivo de $x = a$ até $x = b$. Ainda assim, poderíamos assumir a força aproximadamente constante em subintervalos de $[a, b]$.

i) Para uma função força que varia conforme o gráfico abaixo, em cada caso calcule o trabalho realizado pela força numa partícula que se move de:

a) $x = 0$ até $x = 1$.
b) $x = 1$ até $x = 2$.
c) $x = 2$ até $x = 3$.
d) $x = 0$ até $x = 3$.



ii) Represente cada um dos cálculos realizados no item anterior em notação de somatório.

iii) Que relações você estabelece entre os cálculos anteriores e a tarefa da aula passada?

3. Suponha que um objeto se mova no sentido positivo, ao longo de um eixo coordenado, sujeito a uma força variável $F(x)$ que é aplicada no sentido do movimento. Proponha um método que permita calcular o trabalho W realizado por essa força, quando o objeto se move de $x = a$ até $x = b$.

Procedimentos metodológicos

Reconhecemos que a pesquisa teve por objetivo investigar uma realidade específica e, possivelmente, com essa investigação, ter subsídios suficientes para fosse feita uma intervenção nessa realidade, o que permite caracterizá-la como qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

De acordo com Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa não está preocupada com representações numéricas do contexto pesquisado, mas sim de uma compreensão profunda a respeito de um grupo social ou de uma organização. Para esses autores, pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos “buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos” (Gerhardt & Silveira, 2009, p.32).

A coleta de dados ocorreu em duas turmas, na segunda metade do primeiro semestre de 2022, uma delas com 35 alunos matriculados e a outra com 15. A realização das tarefas exploratórias ocorreu em pequenos grupos, de 4 ou 5 alunos, promovendo a interação entre os integrantes. Todos os estudantes foram esclarecidos quanto à pesquisa que estava sendo realizada e puderam optar por disponibilizar ou não o material que foi coletado durante as aulas para fins de análise. Vale destacar que a coleta de protocolos escritos dos grupos, entregues ao final de cada tarefa, fazia parte da rotina de trabalho da disciplina, sendo prevista em plano de ensino e subsidiando a avaliação realizada ao longo do semestre. Assim, coube aos estudantes realizarem a gravação dos áudios das discussões das tarefas em grupos e enviá-los via Whatsapp, autorizando seu uso para fins de pesquisa.

Uma primeira etapa do trabalho foi organizar o material em áudio no Google Drive e selecionar quais desses materiais efetivamente poderiam ser analisados, descartando os áudios que não estavam audíveis e os que os grupos faziam apenas uma sistematização da sua resolução após a finalização da tarefa ao invés de todo o processo de discussão – conforme havia sido solicitado pela pesquisadora.

Das duas tarefas exploratórias, foram coletados, ao todo, 10 áudios. Destes, apenas 4 eram audíveis e tinham potencial para a análise. Selecionamos um grupo que consideramos representativo para análise, composto pelos estudantes aqui denominados Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3 e Aluno 4, sendo separados trechos que possibilitassem a identificação de ideias e entendimentos da estrutura de uma integral definida.

Esses trechos em áudio foram transcritos na íntegra e articulados com os protocolos escritos. Em seguida, iniciou-se a análise dos dados, identificando, em cada trecho de fala do áudio transcrito, as camadas da estrutura da soma de Riemann (Sealey, 2014; Jones 2015). A apresentação e análise desses são feitas na próxima seção.

Análise e discussão dos dados

Neste capítulo, apresentamos e analisamos dados oriundos da implementação da proposta de intervenção, a partir do trabalho com episódios de resolução das duas tarefas exploratórias. Procuramos, por meio dos dados apresentados, evidenciar oportunidades para (re)significar o conceito de integral definida de uma variável a partir das tarefas 1 e 2. Para uma melhor compreensão do leitor, os trechos que se deseja destacar estão em negrito, e logo abaixo a análise e considerações sobre o trecho destacado.

Tarefa exploratória 1

O grupo inicia a discussão da questão 1, que considera a região delimitada pela curva$f(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$, preenchida por alguns retângulos, pedindo que os alunos identifiquem a medida da base e a altura de cada um dos retângulos e, em seguida, a área aproximada da região usando esses retângulos.

Aluno 3: Tá, a gente tem que saber se a base é a total ou só do retângulo.
Aluno 4: Vamos fazer dos dois, porque se a gente descobrir a base do retângulo, a gente sabe mais ou menos a base total.
Aluno 2: A do retângulo teria que pegar $\mathbf{0,5}$ e dividir por 3.
Aluno 1: O problema é que é uma curva, porque se fosse um retângulo.
Aluno 2: Era fácil.
Aluno 1: Base vezes altura dividido por 2.
Aluno 2: Não, retângulo não tem que dividir por 2.
Aluno 4: É só base vezes altura mesmo.
Aluno 1: Não, mas, eu digo assim, se fosse uma reta a gente usava o retângulo dividia por 2 dava certinho.
Aluno 3: Tem que fazer.

Nesse primeiro trecho do diálogo, o grupo explora um dos elementos relacionados à camada do produto que é "composta pela multiplicação de duas quantidades, $f(x_i)$ e x, onde $f(x_i)$ pode ser conceituada como uma taxa e x como uma diferença" (Sealey, 2014, p.); no caso a compreensão da base dos retângulos que preenchem a região delimitada pela curva e pelo eixo. Na imagem apresentada na tarefa, havia uma marcação de um ponto de abscissa 0,5 como ponto médio do intervalo [0,1]. Assim, da fala do Aluno 2, temos que ele reconhece que a base dos retângulos será um terço dessa medida ou, de forma equivalente, um sexto do intervalo. Já o Aluno 4 destaca que a área de cada retângulo será obtida pelo produto da medida dessa base pela altura.

Aluno 1: Integral, será?
Aluno 2: Não, vai ser integral pela soma de Riemann. Vai ser isso aqui ó, pegar a quantidade de intervalo de área embaixo e dividir por ele, e primeiro vezes o, primeiro dividido pelo total. É 1 menos 0.
Aluno 1: A base vai ser.
Aluno 3: Sobre 5 né?
Aluno 2: É, sobre 5.
Aluno 4: Porque ao meu ver, dava pra fazer uma integral de $\mathbf{0}$ até 1, da função $\boldsymbol{x^2}$.
Aluno 2: Sim, mas isso aí é a soma de Riemann mesmo, a soma de Riemann é uma integral definida de $\mathbf{0}$, de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$.
Aluno 4: Que seria de $\mathbf{0}$ até 1 né?
Aluno 2: Aham. E aí, o limite tendendo para infinito, ou aqui nesse caso, tendendo para 5, da soma mesmo, da somatória de…
Aluno 2: Porque tendendo para 5?

Aluno 4: Por causa que tem 5 subintervalos.

Da continuidade do diálogo, podemos notar que o Aluno 2 faz referência à soma de Riemann para determinar a área sob a curva $f(x) = x^2$. Ele evidência elementos tanto da camada da soma quanto da camada do limite, nas quais à medida que n se aproxima do infinito das duas camadas, soma e produto, surge a integral de Riemann. (Sealey, 2014), ao declarar que uma integral definida é o limite de uma soma de Riemann. Por sua vez, o Aluno 4 reconhece que essa área poderia ser calculada de forma exata por meio de uma integral definida. Entretanto, parece não ser clara para eles a compreensão de questões conceituais acerca dessas camadas, por exemplo, quando o Aluno 2 diz que deve ser um limite tendendo a 5.

Aluno 2: Hum, tá. Não tinha pensado nisso.
Aluno 3: x^2dx.
Aluno 4: Aí quando você deriva x, não quando você integra x^2, fica x sobre 3.
Aluno 3: x^3 sobre 3.
Aluno 2: Vai levar 0 e 1.
Aluno 4: Como assim?
Aluno 2: Substituindo 0, fica 0. Substituindo 1, fica $\frac{1}{3}$.
Aluno 4: Não, mas a hora que você vai integrar.
Aluno 1: Primeiro você vai integrar o indefinido.
Aluno 3: Tinha que fazer uma integral em $f(x)$, limitado por 0 e 1, pra achar o [inaudível] da base.
Aluno 2: O que você acha?
Aluno 4: Não, eu acho que se a gente for fazer integral, a gente vai descobrir a área total né, mas ele quer saber só a dos retângulos.

O grupo usa o procedimento de cálculo de uma integral definida a partir da determinação da antiderivada, embora não tenha sido isso o que havia sido solicitado nessa etapa da tarefa. Assim, depois de encontrado o valor da área abaixo da curva utilizando integral definida, o Aluno 4 chama a atenção do grupo para o que o enunciado da tarefa dizia. Então começam a encontrar a base de cada retângulo, ou seja, Δx.

Aluno 3: Sim.
Aluno 2: Não é nem a área primeiro né, é só a base né?
Aluno 4: É a base aqui ó.
Aluno 2: Peraí, dividi.
Aluno 4: **É 0,5 dividido por 1 não é? Dividido por 3 ou por 2, tanto faz.**
Aluno 2: Então, cada intervalo deste é 0,16.
Aluno 4: 0,16?
Aluno 2: É, 0,16666.
Aluno 1: Ele quer saber a área de cada retângulo?
Aluno 2: Aham.
Aluno 4: A área? Ele quer saber só a altura depois, ele quer saber primeiro a base.

Aluno 3: Provavelmente a gente só vai integrar no item (c), que é para calcular a área aproximada da região.
Aluno 4: É, aí vai usar a soma do coisa lá, que eu esqueci o nome [referindo-se à Soma de Riemann.
Aluno 2: É, ele quer saber quanto que vale a base.
Aluno 4: É.
Aluno 1: **Mano são $1, 2, 3, 4, 5$ e 6 - 6 intervalos, você pega o 1 e divide por 6. É $0,166666$.**
Aluno 4: 6 intervalos?
Aluno 1: É.
Aluno 4: Será que é tão fácil assim?
Aluno 2: Então, a gente desacostumou a fazer uma coisa fácil.
Aluno 1: Pra mim é isso, o que você acha?
Aluno 2: Acho que é isso aí.
Aluno 4: $0{,}16666$.
Aluno 1: Então o item (a) é só isso mesmo?

Nesse trecho da discussão, o grupo explora, de fato, o que foi pedido no item (a), ou seja, determinar a base de cada retângulo. Este é um elemento importante para a compreensão da camada da soma (Sealey, 2014). Inicialmente, há dúvida sobre dividir a medida 0,5 em duas ou três partes, como destacado pelo Aluno 4. Após algumas conjecturas iniciais, o Aluno 1 aponta que é necessário dividir 1 por 6.

Aluno 4: É, aí tem que saber a altura de cada, de cada um dos retângulos. **Empresta a régua aí que vou chutar.**
Aluno 2: **Não, é só tacar na equação $f(x) = x^2$.**
Aluno 3: É $f(x) = x^2$.
Aluno 4: Ah é, faz sentido!
Aluno 4: **Peraí tem que pegar o final, daí pega o final ou o começo do retângulo? O final né?**
Aluno 2: O final.
Aluno 1: Não é o começo.
Aluno 4: **Vou pegar o começo então, o primeiro retângulo vai ser em 0, não vai ter altura nenhuma.**
Aluno 2: Aham.
Aluno 4: **Ai depois vai ser $1,6^2$?**
Aluno 1: Vocês estão fazendo, tipo 1,6 vezes $1{,}6^2$?
Aluno 4: Não, é eu que tô louco, eu falei 1,6 não tem nada a ver é $0{,}16$.
Aluno 1: Que vai ser ao quadrado, aí depois $0{,}37^2$.
Aluno 4: 0,32 né?
Aluno 1: No caso seria 0,33 né?
Aluno 2: Deixa em fração, $\frac{1}{6}$.
Aluno 1: Aí no caso tem que fazer 6 contas né?
Aluno 4: É.

O Aluno 4 sugere, então, determinar a altura dos retângulos com uso da régua, no caso, a figura que acompanha a tarefa. Porém, logo essa sugestão é descartada, pois o Aluno 2 reconhece que o valor procurado é obtido a partir da expressão da função. Trata-se de outro elemento importante da camada do produto (Sealey, 2014), o reconhecimento do valor da função no ponto como um dos fatores que constituem a MBS (Jones, 2015).

Na continuidade da discussão, observam-se os pontos amostrais do intervalo e reconhecem que o primeiro será 0, o segundo 0,16, o terceiro 0,32 (ou 0,33). Há dúvidas sobre a escolha entre o ponto inicial ou final de cada subintervalo, e o Aluno 4 opta por trabalhar com o ponto inicial. Porém, não parece ter ficado claro no grupo o motivo dessa escolha (na verdade, a imagem da tarefa sugere um preenchimento da região com retângulos que ficam abaixo dela).

Considerando a dificuldade em trabalhar com aproximações, o Aluno 2 sugere o uso da representação fracionária. A resolução completa dos itens (a) e (b) sistematizada no protocolo escrito do grupo é mostrada na Figura 1.

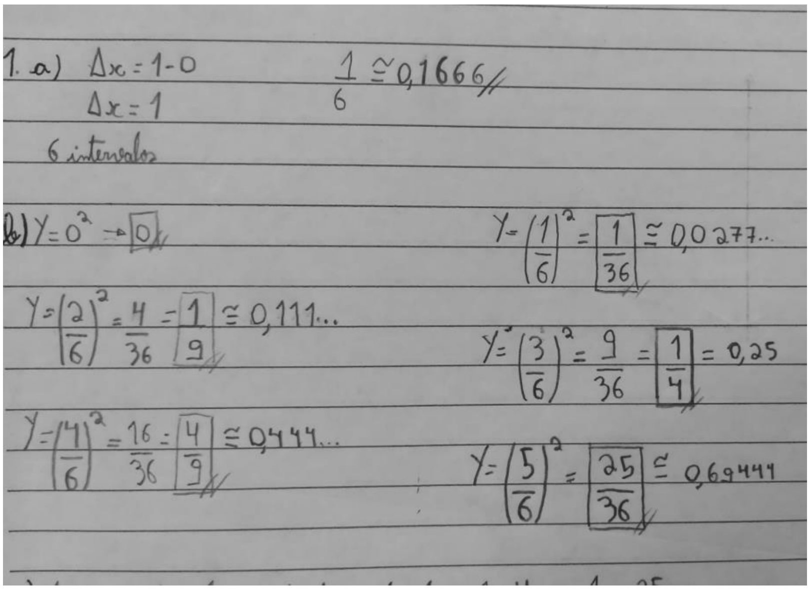


Figura 1.

Resolução da questão 1, itens (a) e (b) da Tarefa Investigativa 1 (dados da pesquisa, 2022)

O grupo prossegue a com discussão, referente agora ao item (c) da tarefa, que solicitava a área aproximada da região a partir dos retângulos.

Aluno 2: Vou ir pensando na (c) então.
Aluno 4: Mas, aí a (c) vai ter que usar. Vai usar a fórmula daí.
Aluno 3: Que fórmula?
Aluno 2: Bom, a gente tem ela.
Aluno 1: Ou não.
Aluno 1: Tendo a altura e tendo a base, a gente faz um vezes o outro.
Aluno 4: Não é dividido por 2.
Aluno 1: Não to falando de dividir por 2, porque tipo assim, a gente vai ter a base e altura de cada um, faz um vezes o outro e depois é só somar.

Aluno 4: **Mas daí vai sobrar um pedaço né, vai sobrar isso aqui de cada um.**
Aluno 1: Não, mas a gente quer saber da região.
Aluno 3: A região delimitada por uma curva. Ai teria que calcular.
Aluno 4: Calcule a área aproximada da região usando retângulo.
Aluno 1: Ela quer aproximada, então é os retângulos mesmo.
Aluno 3: Não, você tem que usar a partir dos retângulos sobre a área em que a curva delimita.
Aluno 2: Calcule a área aproximada da região usando esses retângulos, se é aproximada não é pra calcular exatamente a área que tem embaixo dessa curva.
Aluno 3: Eu acho que a gente tem que calcular a área que tem embaixo da curva até o 1, tá ligado? Aí calcula a área.
Aluno 2: Porque se ele quer a área aproximada, provavelmente não era, no caso vai ser esse [apontando para o desenho]. Mas, se ele falou que é pra usar os retângulos.
Aluno 3: Então, mas eu acho que vai usar os retângulos como base para descobrir a área da 3, tipo, eu acho que deve ser isso.
Aluno 2: A c.
Aluno 3: Igual, tipo tem duas opções aqui, ou a gente descobrir a área total da soma dos retângulos ou descobrir a área que a curva delimita, tipo, da área da curva pra baixo.
Aluno 2: Não, mas ele fala ó, usando os retângulos.
Aluno 3: Então, aí dá uma quebrada. Porque eu já não sei se você tem que usar retângulo pra tipo delimitar a curva e calcular a área ou se você tem que calcular a área da soma dos retângulos.
Aluno 1: Na verdade a ideia da integral é você conseguiu calcular a área, então eu acho, que quando ele passou isso aqui, não faz sentido a gente fazer por outro método que não seja integral.
Aluno 4: **É que na verdade ele tá retomando pra relembrar integral né?**
Aluno 3: **É então, isso aqui é tipo um conceito de integral, tá ligado? Não necessariamente.**
Aluno 4: Ele mandou a gente usar os retângulos.
Aluno 2: Ele mandou a gente usar os retângulos e aproximado ainda.
Aluno 1: **Como ele tá falando pra gente usar os retângulos, então a gente faz a soma dos retângulos e arredonda pra cima.**

Da fala inicial do Aluno 1, percebemos que o grupo reconhece a estrutura multiplicativa presente no cálculo da área, uma vez que é necessário multiplicar a medida da base pela medida da altura. Porém, o grupo fica em dúvida se esse procedimento é adequado, uma vez que os retângulos não preenchem plenamente a região e, como destacado pelo Aluno 4, vai "sobrar" um pedaço em cada retângulo. Os alunos discutem a ineficácia da área dos retângulos para calcular uma aproximação para a área total, já que conhecem a integral definida enquanto uma ferramenta que fornece um valor exato para a área abaixo da curva.

Ao final desse trecho, o grupo reconhece tratar-se de uma tarefa para "relembrar" o conceito de integral, e realiza o cálculo mostrado na Figura 2.

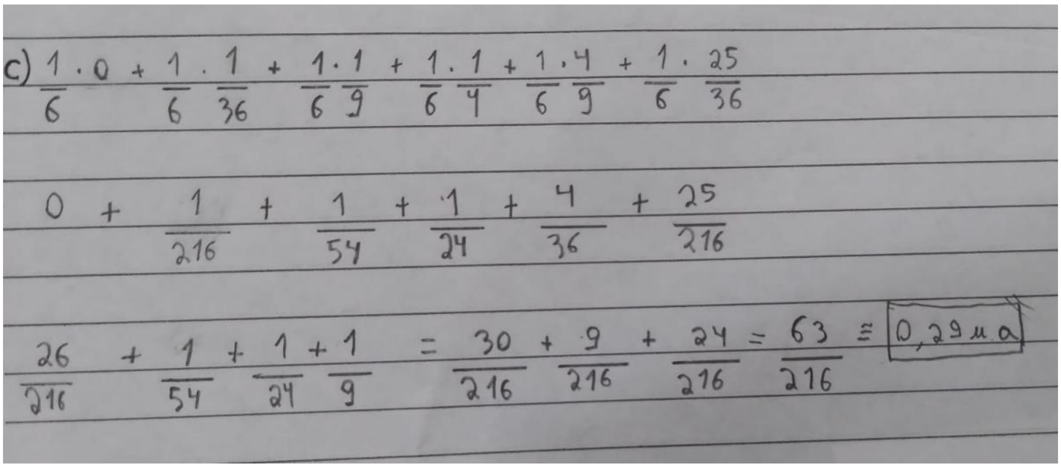


Figura 2.

Resolução da questão 1, item (c), da Tarefa investigativa 1 (dados da pesquisa 2022)

O grupo então explora a questão 2, que, após uma breve explicação sobre a notação de somatório, solicita que ela seja usada para representar o cálculo realizado anteriormente.

Aluno 4: Uma maneira conveniente de escrever (...) sigma maiúsculo.
Aluno 2: Cadê a fórmula geral?
Aluno 4: Notação de somatória.
Aluno 1: É isso aqui, mas tipo isso aqui é a soma de Riemann, isso aqui é só a soma.
Aluno 2: Mas é isso aí que eu queria.
Aluno 1: Então é sigma.
Aluno 4: É só fazer a somatória, de $i = 1$, aí a gente coloca a é igual, a é igual, a de 1, a de 2 mais a de 3, não é?
Aluno 2: Como assim? Não, tem que pegar.
Aluno 4: **Soma de a, de 1 até 6.**
Aluno 2: Soma do primeiro, do segundo, do terceiro.
Aluno 4: Então, aí faz a somatória da área de 1 até 6, não é?
Aluno 2: É, mas como que vai escrever isso?
Aluno 4: Somatória de n, $i = 1$, $a_1 + \ldots + a_6$.
Aluno 2: Porque o $i = 1$?
Aluno 4: Ah, toda vez eu coloco $i = 1$ e sempre está certo, o porque eu não sei.
Aluno 1: **Porque o i vai de 1 até o número que você colocou em cima.**
Aluno 3: Mas nesse caso aqui, a gente tá considerando 6 né? A gente teria que pegar aqui embaixo.
Aluno 1: Então, daí o 6 vai em cima.
Aluno 3: Teria que pegar aqui de baixo.
Aluno 1: Exato.
Aluno 3: Aí o i é o número que começa, o valor inicial.
Aluno 1: Não, por exemplo, **aqui eu fiz ó, $f(x_i)$ e i vai de 1 ao 6, $f(x_1)$, o que é x_1?**
Aluno 4: É o y, quando o x vale 1, não é?
Aluno 3: Isso.
Aluno 1: Não, quando o x vale x_1, o x_1 é no caso aqui 0.
Aluno 4: O x_i no caso vai ser ele variando, vai ser do 0 até.
Aluno 1: É, o pior que tem que pensar no jeito bom de escrever isso aqui na fórmula, um jeito que vai ficar bom. Deixa eu pensar, um jeito que o primeiro seja 0, entendeu?

Aluno 2: É a somatória da primeira, se i for partir do 0, se o $i = 0$, vai ser $a + 0$ que dá zero.
Aluno 1: Somatória de $i = 1$ até 6 de a_i, beleza?
Aluno 2: Demoro.
Aluno 1: Que é igual, agora vamos abrir esse a. 6 igual a 1, $f(x_i)$.
Aluno 4: Tá, como que vai ficar a A então rapaziada?
Aluno 1: Cara, nós não chegamos num consenso.
Aluno 2: Mano, o x_i dá a, como que vai escrever a fórmula?
Aluno 1: Teria que partir de 0, daí seria a soma de $0 + 0$.
Aluno 4: Posso fazer o que eu acho que vai ser?
Aluno 3: Não é só pegar a área do retângulo primeiro, mais a área do segundo, mais a área do terceiro, mais a área do quarto até o sexto, aí somar vai dar o valor.
Aluno 2: Isso.
Aluno 4: Eu chuto que ia ficar mais ou menos assim ó, chuto não né, eu acho.
Aluno 2: É.
Aluno 1: É, deixa só na forma de somatório de a_i mesmo.
Aluno 4: Pode ser, mais fácil né? Como é pra escrever então?
Aluno 1: Do jeito que você quiser.
Aluno 4: Então vou colocar, somatória, por extenso tá ligado?
Aluno 4: Tá, então como é que vai escrever? Do jeito que tá no seu caderno ou do jeito que eu escrevi?
Aluno 2: Ah, vai do jeito que está no caderno.
Aluno 3: Somatória.
Aluno 1: Somatória de $i = 6$, a_i.
Aluno 4: $i = 1$ vai até 6, a_i.

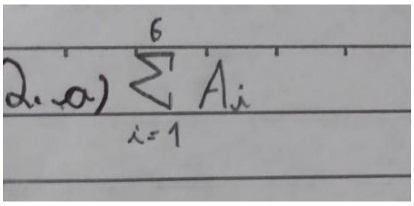


Figura 3.

Resolução da questão 2, item (a), da tarefa investigativa 1 (dados da pesquisa 2022).

Nesse trecho de transcrição, os alunos tentam compreender a estrutura do somatório e aplicá-la à situação em análise. O grupo chega a um consenso sobre a variação do índice, no caso de 1 a 6 (Figura 3). Entretanto, não é claro para eles como representar o termo interno do somatório. Essa discussão sobre o somatório, embora com algumas conclusões incompletas e outras equivocadas, foi importante para que o grupo pudesse mais tarde entender a representação da soma de infinitas peças atrelada ao conceito de integrais definidas para uma ou mais variáveis. Além disso, em um momento posterior de sistematização, o professor ajudou a turma a organizar essa estrutura de somatório para representar MBS (Jones, 2015).

Por fim, o grupo discute as questões 3 e 4, que solicitam o valor exato da área com uso de uma integral definida e estabelecimento de relações entre esse valor e o obtido na questão 1.

Aluno 2: Conhecimento de cálculo, vai determinar exatamente o valor.

Aluno 4: **Ai o que você faz, fica x^2, $\frac{x^3}{3}$.**

Aluno 2: É.

Aluno 4: **Ai você substitui 1 no x, fica $\frac{1}{3}$, fica $0,333$ e no caso na (c) nossa deu 0,29 então a gente pode falar que a gente conseguiu, chegar mais próxima usando integral do que desse jeito**, se vocês quiserem eu posso ir passando a limpo, se vocês concordarem que é isso.

Aluno 2: Não, eu concordo.

Aluno 4: O que você acha? Tipo isso aqui. Aí você integra daí, fica $\frac{1}{3}$, que dá 0,333 ai esse 0,333 que deu diferença desse daqui, é porque tem essas áreas aqui que a gente não contou.

Aluno 1: É, mas como que você sabe que a integral de $\frac{x^3}{3}$ é $\frac{1}{3}$?

Aluno 2: Pela regra.

Aluno 1: É, mas eu não lembro como é.

Aluno 2: Na regra de derivação é tipo.

Aluno 4: É porque é tipo assim, você integra em 0 dá 0, não tem como a área ser 0, ai você integra em 1, aí fica $\frac{1}{3}$ se você substituir 1 no x^3.

Aluno 2: Não, ele quer saber como é que a gente chegou em $\frac{x^3}{3}$ não é?

Auno 1: Aham.

Aluno 4: Então, você integrou o x^2.

Aluno 2: Não, mas esse é o negócio, ele quer saber, esse é o processo, a gente sabe que tinha que dar esse resultado (...).

Aluno 4: Não entendi.

Aluno 2: Tem um processo tipo de sair do x^2 até chegar x^3.

Aluno 4: Hum.

Aluno 2: A tá, eu sei como vou explicar é o seguinte, quando a gente deriva a gente não pega ele, diminui o n de 1 e dá o tombo.

Aluno 1: Dá o tombo.

Aluno 2: Se a gente pegar tipo, a integral é o processo contrário disso, se a gente subir o coisa, a gente vai ter que somar mais um aqui no coisa, no numerador, ai vai ficar lá, como ele não tem nada embaixo, alguma coisa tem que subir se não ficaria 3.

Aluno 3: O contrário da multiplicação é a divisão, aí você diminui pelo expoente. É tipo igual a regra de derivação. Se vocês acharem que é isso, eu posso.

Aluno 1: Por mim pode ser.

Aluno 2: É, só que daí aqui você não escreve, só $\frac{x^3}{3}$ né, não precisa colocar esse sinal.

Aluno 3: Esse aqui, não precisa? Porque é aqui que você vai integrar, aqui não integrou ainda, aqui você só fez a.

Aluno 2: Não, não, aí você vai fazer só $\frac{x^3}{3}$ um traço do lado.

Aluno 3: Assim, 1 e 0.

Aluno 2: Isso aqui você não usa mais daí.

Aluno 3: Aqui, 1 e 0 assim né? O que você acha?

Podemos notar, nesse trecho, que os alunos relacionam a antiderivada como processo inverso da derivada de uma função, utilizando-a para o cálculo da integral definida. O grupo parece lidar bem com questões algorítmicas, mas sem deixar explícita a compreensão da relação entre o valor exato calculado dessa forma e aquele obtido anteriormente. Na Figura 4, temos a resposta apresentada pelo grupo, com alguns elementos importantes da camada do limite.

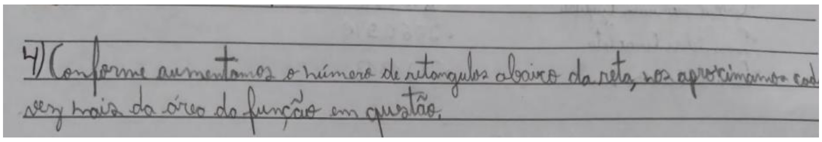

4) Conforme aumentamos o número de retângulos abaixo da reta, nos aproximamos cada vez mais da área da função em questão.

Figura 4.

Resolução da questão 4 da Tarefa investigativa 1 (dados da pesquisa, 2022).

Sintetizando a análise dessa tarefa, inferimos algumas oportunidades para explorar o conceito de integral definida de uma variável que a tarefa ofereceu, especialmente ao ativar alguns elementos das camadas do produto, da soma e do limite (Sealey, 2014), destacados no Tabela 2.

Tabela 2

Oportunidades para explorar o conceito de integral definida de uma variável (os autores).

Camada do Produto	● Reconhecimento da medida da base de cada retângulo; ● Determinação da abscissa dos pontos da partição do intervalo; ● Reconhecimento da medida da altura do retângulo como valor da função no ponto inicial de cada subintervalo.
Camada da Soma	● Determinação da área aproximada por um processo de soma; ● Compreensão da variação dos índices na notação de somatório.
Camada do Limite	● Ideia intuitiva de que, aumentando o número de retângulos, a soma aproxima-se cada vez mais do valor exato da área.

Assim, a tarefa proporcionou oportunidades para os membros desse grupo puderem ativar o conhecimento, ainda que de forma incompleta, para explorar elementos das camadas que compõem a estrutura de uma integral de Riemann. Além disso, para que posteriormente pudessem participar de forma mais ativa da discussão coletiva conduzida pela pesquisadora para sistematizar a estrutura do conceito de soma de base multiplicativa na definição de uma integral definida.

Tarefa exploratória 2

Nessa tarefa, focamos na análise de trechos da discussão nos quais os estudantes são instigados a refletir sobre o cálculo do trabalho no caso de uma força variável. Para tal, em um primeiro momento, sugere-se que calculem, a partir de um gráfico de força versus posição, o trabalho realizado em subintervalos.

Aluno 2: Isso aí é o que? Integral de 0 até 1?
Aluno 1: **Mano, isso aí dá pra calcular por matemática daí, normal, não precisa ser integral.**
Aluno 2: Faz a equação da reta?
Aluno 1: Não mano, ele quer o trabalho, não quer?
Aluno 2: Então, aqui é simples, mas.
Aluno 1: Você faz a área, né?
Aluno 2: É.
Aluno 1: Dá pra fazer nisso mano.
Aluno 2: Você pode fazer isso aqui, pra conferir o outro cálculo que você vai fazer, você descobre a equação da reta, aí faz a integral desta equação e substitui os valores.
Aluno 1: Mas daí tem que ser depois.

Embora a tarefa sugerisse que os alunos utilizassem partições do intervalo, eles parecem reconhecer a integral definida enquanto ferramenta que fornece o valor exato do trabalho. O Aluno 2 propõe que, para calcular o trabalho realizado bastasse assumir a integral definida de 0 a 3, da função força que varia de acordo com a posição. O grupo determina, corretamente, a expressão algébrica dessa função, e efetua o cálculo do trabalho por meio de integrais.

Entretanto, ao deparar-se com o item (b) da tarefa, que solicitava a representação dos cálculos com notação de somatório, o grupo ficou com dúvidas.

Aluno 4: E isso, e agora?
Aluno 2: Notação de somatória.
Aluno 4: Somatória é que o a gente fez na outra lá.
Aluno 2: 1 2 3 você que transformou na conta, eu não lembro, vai ser 3 retângulos? Então vai ser somatória de 1 até 3 e como que...
Aluno 2: Não, somatória, intervalo de 1 até 3.
Aluno 4: Não, sim.
Aluno 4: Somatória vai ser de 1 até 3.
Aluno 2: E como traduzir isso na fórmula que você fez?
Aluno 4: Somatória da integral disso [...] Vai ficar a somatória de $i = 1$ até 3 da integral
Aluno 2: Eu não sei representar isso aí, eu acho que…
Aluno 4: De 0 né?
Aluno 2: Tem que saber fazer a notação da somatória.
Aluno 4: Não, mas aqui não é integral?
Aluno 2: Porque a gente tá pensando na somatória da integral, só que quando colocar integral ele já vai mostrar a área.

Nesse trecho, vemos o que o grupo, embora soubesse que o trabalho pode ser calculado por meio de uma integral, não foi capaz de relacionar esse conceito com a representação em notação de somatório. A intervenção da pesquisadora foi necessária nesse momento.

> Pesquisadora: A força total ali, como vocês calcularam o item (a)?
> Aluno 2: Integral de 0 até 1, de x.
> Pesquisadora: Vocês fizeram a integral?
> Aluno 2: Era pra fazer a área simples?
> Pesquisadora: É.
> Aluno 2: Figura geométrica?
> Pesquisadora: porque aqui ele está falando assim ó, poderíamos assumir a força aproximadamente constante em subintervalos, então, ele tá falando que em cada intervalo você vai ter que assumir, naquele intervalo a força é constante ...
> Aluno 2: Falar que era é um retângulo isso aqui?
> **Aluno 1: É como se tivesse tipo uma escadinha sabe.**
> Pesquisadora: Isso.
> Aluno 2: Ah.
> **Aluno 1: A força constante aqui, a força constante aqui, a força constante aqui.**
> Aluno 4: Ah tá, então a gente fez outra coisa.
> Pesquisadora: É vocês, na hora que vocês colocaram a integral vocês assumiram que dentro do intervalo ela já é variável, aqui ele tá pedindo que vocês assumam dentro cada intervalo, você assume que ela é constante.

Neste momento a pesquisadora direciona os alunos, fazendo com que eles se atentem ao enunciado da questão. Reconhecer a estrutura de MBS (Jones, 2015) da situação era importante para que os estudantes, de fato, compreendessem o porquê de se usa uma integral definida no cálculo do trabalho realizado por uma força. Assim, foi importante oportunizar ao aluno o entendimento do cálculo do trabalho como sendo o valor aproximado de uma soma de base multiplicativa.

Da intervenção da professora, o Aluno 1 parece reconhecer alguma semelhança entre essa situação e o cálculo de área da tarefa 1, ao mencionar que é “como se tivesse tipo uma escadinha aqui”. Em seguida, ele parece compreender que, nessa estratégia, assume-se que, em cada subintervalo, a força é aproximadamente constante ao dizer que “a força é constante aqui, a força é constante aqui…”. A pesquisadora, então, propõe que estabeleçam alguma relação entre essa situação e a da tarefa anterior para representar essa ideia em notação de somatório:

> Pesquisadora: O somatório da atividade anterior, como que vocês fizeram? Os retângulos até aquela 6 lá? Vocês escreveram lá, o somatório de i igual 1 a 6.
> Aluno 2: i sobre 6 ao quadrado mais i sobre 6, mas… não, é multiplicado ...
> Pesquisadora: Quantas partições vocês têm aí?
> Aluno 2: 3, é de 1 até 3, somatória de 1 até 3.
> Pesquisadora: Isso.
> Aluno 2: Só que a gente não sabe traduzir essa área numa equação igual a anterior lá.

Pesquisadora: Pode deixar $f(x)$.
Aluno 4: **Somatório de f, algo assim?**
Pesquisadora: É.
Aluno 2: De 1 até 3, somatório de $f(x)$.
Pesquisadora: É, só que daí vocês estão somando o quê? O que cada retângulo desse representa?
[inaudível]
Pesquisadora: Isso, geometricamente: área, então área não é só a função né, é um produto, a função é o quê? É a altura, certo? Se você pegar $f(x)$ é a altura, o que tá faltando ainda para calcular a área?
Aluno 3: Comprimento.
Aluno 4: A distância dele.
Pesquisadora: A gente pode chamar de Δx que é a variação aqui da posição.
Aluno 2: **Então isso aqui, vira isso aqui? Somatória de** $f(x)$.
Aluno 3: De 1 até 3?
Aluno 2: De 1 até 3.
Aluno 3: **Então o que importa é a divisão dessas áreas que a gente pegou no gráfico, como aqui são 3 retângulos. Então é somatória de $i = 1$ até 3.**
Aluno 1: **De x vezes.**
Aluno 3: **Δx.**

A partir da intervenção da pesquisadora, que destacou alguns elementos das camadas do produto e da soma da integral definida (Sealey, 2014), o grupo foi capaz de expressar, em notação de somatório, o trabalho realizado para o caso particular de força fornecida no item (a) da tarefa. Em especial, ela procura sistematizar com o grupo os elementos presentes na notação de somatório: o intervalo de variação, o valor da função em pontos amostrais e o tamanho de cada partição.

O grupo então discute o último item da tarefa, buscando expressar de forma mais geral o cálculo do trabalho realizado por uma força genérica $f(x)$ em um intervalo qualquer $[a, b]$.

Aluno 3: Não, vamos supor que a gente já tenha o $f(x)$, ele fala, a uma força variável $f(x)$ que é aplicada tal tal tal.
Aluno 1: Proponha um método que permita calcular o trabalho.
Aluno 2: **Coloca integral de** $f(x)$, assim.
Aluno 4: É eu vou falar.
Aluno 2: **De a até b**. É isso mesmo, coloca aí integral.
Aluno 4: Não, acho que vou escrever por extenso, tipo, o método para calcular o.
Aluno 2: Só que o que vai ser.
Aluno 4: Trabalho realizado.
Aluno 2: O que vai ser aqui, vai ser a integral de…
Aluno 4: a até b, de alguma coisa.
Aluno 2: a até b.
Aluno 4: de x.
Aluno 2: de $\boldsymbol{f(x)dx}$, é isso.
Aluno 4: é.
Aluno 2: Você tem que escrever, se você quiser escrever por extenso.
Aluno 4: Eu vou escrever por extenso daí eu coloco aqui embaixo.

Aluno 2: Então fala assim, você escreve **a integral com intervalo, intervalo de x, de a até b, de a até b pra x, da função $f(x)$**.

Sintetizando a análise desta tarefa, inferimos algumas oportunidades para explorar o conceito de integral definida de uma variável que ela ofereceu, em especial ativando alguns elementos das camadas do produto e da soma (Sealey, 2014), destacados no Tabela a seguir:

Tabela 4

Oportunidades para explorar o conceito de integral definida de uma variável (os autores)

Camada do Produto	● Reconhecimento do elemento Δx como intervalo de deslocamento. ● Reconhecimento da medida da altura do retângulo como valor da função força no ponto inicial de cada subintervalo. ● Compreensão da estrutura multiplicativa da expressão $f(x)\Delta x$. ● Relação da expressão $f(x)\Delta x$ com a área de um retângulo.
Camada da Soma	● Determinação do intervalo de variação para o somatório; ● Estabelecimento de relação entre a soma dos trabalhos realizados em cada subintervalo e o trabalho calculado por meio de integrais.

Assim, embora a tarefa, num primeiro momento, não tenha proporcionado oportunidades para os membros desse grupo explorarem elementos das camadas que compõem a estrutura de uma integral de Riemann, o papel da pesquisadora foi fundamental. Na discussão, é possível ver que, após a intervenção da pesquisadora, os alunos foram capazes de configurar um somatório para calcular o valor aproximado do trabalho e, posteriormente, mesmo que de forma intuitiva e simplificada, relacionar o somatório à integral utilizada para calcular o valor exato do trabalho. Coube ao professor e à pesquisadora, no momento da discussão coletiva, organizar com a turma essas ideias, algumas ainda confusas, com o intuito de oferecer à turma elementos para explorar o conceito de integral definida.

Considerações Finais

Como objetivo de nossa pesquisa, elencamos a elaboração e a implementação de uma proposta de intervenção, a partir do trabalho com episódios de resolução de tarefas (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan, Alves & Negrini, 2021; Trevisan, 2022), que ofereça a estudantes de CDI oportunidades para explorar o conceito de integral de uma variável. Concebemos como parte da nossa intervenção a organização de tarefas de natureza exploratória, com potencial para que os alunos pudessem acessar as quatro camadas, e a partir disso, explorar o conceito de integral definida (Sealey, 2006, 2014). Por meio da coleta de dados, procuramos reconhecer se, de fato, das tarefas formuladas tinham esse potencial.

A tarefa exploratória 1 oportunizou aos estudantes a mobilização da camada do produto, evidente no processo de reconhecimento da medida da base de cada retângulo na determinação da abscissa dos pontos da partição do intervalo e no estabelecimento da medida da altura do retângulo como valor da função no ponto inicial de cada subintervalo. A camada da soma é explícita na determinação da área aproximada por um processo de soma e na compreensão da variação dos índices na notação de somatório. E a camada do limite é expressa na ideia intuitiva de que, aumentando o número de retângulos, a soma aproxima-se cada vez mais do valor exato da área.

Já a tarefa exploratória 2 proporcionou aos estudantes a compreensão da camada do produto, em especial na compreensão da estrutura multiplicativa da expressão para o cálculo do trabalho realizado por uma força em um pequeno intervalo, e a camada da soma presente principalmente no estabelecimento de relação entre a soma dos trabalhos realizados em cada subintervalo e o trabalho calculado por meio de integrais. Assim, pudemos inferir que com as tarefas exploratórias 1 e 2, os estudantes acessaram o conceito de soma de base multiplicativa presente na soma de Riemann, fundamental na exploração do conceito de integral definida.

Como limitação da nossa proposta, reconhecemos que a camada da função não foi explorada espontaneamente nas discussões realizadas em grupos a partir da proposta das tarefas. No entanto, no momento da sistematização realizado pelo professor e pela pesquisadora, essa camada foi abordada para explicar a relação de área sob a curva com a antiderivada no cálculo da integral definida, utilizando a ideia de função de acumulação. Dessa forma, esse aspecto deve ser considerado na adequação das tarefas, de modo a proporcionar aos estudantes a oportunidade de mobilizar e compreender a camada da função que está presente em uma integral definida.

Referências

Brasil (2019). Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES Nº 1, de 23 de janeiro de 2019. *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação de Engenharia*. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, Seção 1, p. 109.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora.

Borssoi, A. H. & Silva, R. T. D. (2020). Estudo de integrais por meio de tarefas na perspectiva do ensino híbrido. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9(19), 683–703.

Couto, A. F., da Fonseca, M. O. D. S., & Trevisan, A. L. (2017). Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *8*(4), 50-61.

Gerhardt, T. E. & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de Pesquisa*. Editora da UFRGS.

Granberg, C. & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior, 37*, 48-62.

Haddad, S. (2013). Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée. *Petit X*, *92*, 7-32.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior*, *32* (2), 122-141.

Jones, S. R. (2015). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(5), 721-736.

Jones, S. R., Lim, Y. & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1075-1095.

Ponte, J. P. D. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, No. 1991, pp. 46-53). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 230-245.

Silva, G. P. D. (2013). Análise de evasão no ensino superior: uma proposta de diagnóstico de seus determinantes. *Revista da Avaliação da Educação Superior*, *18*, 311-333.

Souza, D. V. D. & Fonseca, R. F. D. (2017). Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(1), 197-221.

Swidan, O. & Yerushalmy, M. (2016). Conceptual Structure of the Accumulation Function in an Interactive and Multiple-Linked Representational Environment. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 30-58.

Thompson, PW e Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, 73, 43-52

Torres, P. L., Alcantara, P. R. & Irala, E. A. F. (2004). Grupos de consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional*, *4*(13), 1-17.

Trevisan, A. L. (2022). Raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: uma análise a partir de tarefas exploratórias. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 15(3), 1-23.

Trevisan, A. L., Alves, R. M. A. & Negrini, M. V. (2021). Ambiente de ensino e de aprendizagem de Cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: resultados e perspectivas futuras. In: Marcele Tavares Mendes; Andresa Maria Justulin. (Org.). *Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática* (pp.155-174). São Paulo: Livraria da Física.

Trevisan, A. L. & Goes, H. H. D. (2016). O método da exaustão e o cálculo de áreas: proposta e uma tarefa com auxílio do GeoGebra. *Educação Matemática em Revista*, *21*(52), 79-85.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11(1), 209-227.

Zarpelon, E. (2022). *Análise de indicadores do perfil discente e docente para estimativas de desempenho acadêmico*: um estudo com alunos de Cálculo Diferencial e Integral I em escolas de engenharia no Brasil e na França. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Tecnologia) -Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa.