ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i3p054-073

Explorando as propriedades da igualdade: uma tarefa de aprendizagem profissional na formação inicial de professores de matemática

Exploring the properties of equality: a professional learning task in the pre-service of mathematics teachers' education

Explorando las propiedades de la igualdad: una tarea de aprendizaje profesional en la formación Inicial de profesores de matemáticas

Explorer les propriétés de l'égalité : une tâche d'apprentissage professionnel dans la formation initiale des enseignants de mathématiques

Samuel Ribeiro da Silva[1]
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0003-1363-5251

Jadilson Ramos de Almeida[2]
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0003-3707-4807

Resumo

Neste artigo, buscou-se identificar os conhecimentos matemáticos e didáticos de futuros professores de matemática, sobre as propriedades da igualdade, na perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK). Para isso, acompanhamos um processo formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), a qual também serviu para produção dos dados qualitativos, sendo utilizado o método de comparações sistemáticas como procedimento de análise. Os sujeitos, em número de 6, estavam cursando a disciplina Estágio Supervisionado Obrigatório III em uma universidade pública do Estado de Pernambuco. Os resultados mostraram que os licenciandos já revelaram indícios dos subdomínios KoT (conhecimento das propriedades, procedimentos, registros de representação) e do KPM (conhecimento do uso correto dos símbolos e justificações matemáticas), ligados ao tema e ao ensino das propriedades da igualdade. A participação dos licenciandos, por meio das discussões e reflexões no momento formativo, permitiu a ampliação dos seus conhecimentos profissionais, corroborando, assim, as potencialidades da Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) em

[1] samuel.ribeiro.@ufrpe.br
[2] jadilson.almeida@ufrpe.br

gerar oportunidades de aprendizagem profissional e em promover desenvolvimento profissional na formação inicial de professores de matemática.

Palavras-chave*:* Formação inicial, MTSK, Propriedades da igualdade, Tarefa de aprendizagem profissional.

Abstract

This article investigates the mathematical and pedagogical knowledge of future mathematics teachers regarding the properties of equality, using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) framework. We adopted a formative process guided by a Professional Learning Task (PLT), which also served as the basis for qualitative data collection. The analysis followed the method of systematic comparisons. The study involved six participants who were enrolled in the Supervised Teaching Practicum III course at a public university in the state of Pernambuco, Brazil. The results indicated that the pre-service teachers demonstrated early signs of mastering key MTSK subdomains, particularly KoT (knowledge of properties, procedures, and representation registers) and KPM (knowledge of proper use of symbols and mathematical justifications), both of which are essential for teaching equality properties. Their active engagement in discussions and reflection during the formative sessions fostered the expansion of their professional knowledge. These findings highlight the potential of Professional Learning Tasks (PLTs) to create meaningful opportunities for professional learning and to support the professional development of future mathematics teachers during their initial training.

Keywords*:* Initial teacher education, MTSK, Properties of equality, Professional learning task.

Resumen

Este artículo identifica los conocimientos matemáticos y didácticos que poseen los futuros profesores de matemáticas acerca de las propiedades de la igualdad, a la luz del marco Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Para eso, se implementó un proceso formativo mediado por una Tarea de Aprendizaje Profesional (TAP), que asimismo funcionó como instrumento para la producción de datos cualitativos. El análisis se realizó mediante el método de comparaciones sistemáticas. Participaron seis estudiantes de la asignatura Práctica Docente Supervisada Obligatoria III de una universidad pública de Pernambuco, Brasil. Los resultados muestran indicios tempranos de dominio en los subdominios KoT (conocimiento de propiedades, procedimientos y registros de representación) y KPM (conocimiento del uso adecuado de símbolos y justificaciones matemáticas), ambos fundamentales para la enseñanza de las propiedades de la igualdad. La participación de los licenciandos en las discusiones y reflexiones del proceso formativo amplió sus conocimientos profesionales, lo que evidencia el potencial de las TAP para generar oportunidades de aprendizaje y fomentar el desarrollo profesional en la formación inicial del profesorado de matemáticas.

***Palabras clave**:* Formación inicial, MTSK, Propiedades de la igualdad, Tarea de aprendizaje profesional.

Résumé

Cet article identifie les connaissances mathématiques et didactiques que possèdent de futurs enseignants de mathématiques à propos des propriétés de l'égalité, dans le cadre théorique du Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Un dispositif de formation, médié par une Tâche d'Apprentissage Professionnel (TAP), a simultanément servi à recueillir des données qualitatives. L'analyse a été menée au moyen de la méthode des comparaisons systématiques. Six étudiants inscrits à l'unité d'enseignement Stage supervisé obligatoire III d'une université publique du Pernambuco, Brésil ont participé à l'étude. Les résultats mettent en évidence des manifestations précoces des sous-domaines KoT (connaissance des propriétés, des procédures et des registres de représentation) et KPM (connaissance de l'usage adéquat des symboles et des justifications mathématiques), essentiels à l'enseignement des propriétés de l'égalité. La participation active des licenciands aux discussions et aux réflexions durant la formation a enrichi leurs connaissances professionnelles, confirmant le potentiel des TAP pour générer des occasions d'apprentissage et favoriser le développement professionnel dans la formation initiale des enseignants de mathématiques.

***Mots-clés** :* formation initiale, MTSK, propriétés de l'égalité, tâche d'apprentissage professionnel.

Várias pesquisas indicam que a formação de professores pautada no conhecimento profissional é um campo que vem crescendo nas investigações voltadas para a área da Educação Matemática nas últimas décadas, tanto no Brasil como no mundo (Ferreira, 2003; Pazuch e Ribeiro, 2017; Ribeiro, Almeida e Mellone, 2021).

Outras pesquisas mostram que um dos problemas que afeta o ensino e a aprendizagem da matemática é a distância entre aquela matemática que se aprende na universidade e a que é ensinada na escola (Ribeiro, 2019), dilema também atrelado à dissonância entre a teoria e a prática docente (D'Ambrósio, 2012).

Além disso, autores tais como Ponte (2012), Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017) e Oliveira e Fiorentini (2018) acrescentam que o conhecimento matemático e didático do professor é um fator que afeta as práticas em sala de aula e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos.

Baseados nesses autores e em Blanco (2003), entendemos que a aprendizagem e o conhecimento profissional docente são duas dimensões do desenvolvimento profissional que compõem a base para busca de ações que promovam qualidade na formação do professor.

Assim, tendo em vista essas ponderações, e fundamentados em Ribeiro (2019) e em Ribeiro e Ponte (2020), constatamos a necessidade de promover oportunidades de aprendizagem aos licenciandos de Matemática, como meio de atenuar as disparidades relatadas nos trabalhos consultados, e que um dos possíveis instrumentos para isso é o uso das Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) em processos formativos.

Direcionamos, dessa forma, nossa pesquisa para o objeto matemático "propriedades da igualdade", em vista da ênfase que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) dá a esse tema e das dificuldades de compreensão por parte de professores e alunos sobre esse conteúdo (Teles, 2002; Lessa, 2005; Ponte, Branco e Matos, 2009; Trivilin e Ribeiro, 2015).

Diante dessas considerações, buscamos responder a questão: quais conhecimentos matemáticos e didáticos os futuros professores de matemática possuem e desenvolvem para o ensino das propriedades da igualdade em um momento formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP)?

Portanto, os objetivos desse artigo são: identificar os conhecimentos matemáticos e didáticos sobre as propriedades da igualdade que futuros professores revelam ao participarem de um processo formativo mediado por uma TAP e compreender as potencialidades dessa tarefa em promover oportunidades de aprendizagem profissional na formação inicial.

Para alcançar esses objetivos, faremos uma síntese das propriedades da igualdade encontradas na literatura, explanaremos sobre o modelo MTSK, indicaremos a metodologia utilizada com o conceito de Tarefas de Aprendizagem Profissional, e, por fim, analisaremos os dados à luz do modelo teórico e analítico mencionado.

As propriedades da igualdade

Observamos que, recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta a Álgebra como área temática (Brasil, 2018), orientando para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Almeida, 2016) desde os anos iniciais. As propostas curriculares associadas a essa mudança surgem como forma de minimizar as dificuldades que ainda persistem em alunos e professores nesse campo do conhecimento, frente aos resultados desanimadores apresentados, por exemplo, pelos indicadores: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), por avaliações como as do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), e pelo Programa Internacional de Avaliação Estudantes (PISA).

Dentre os vários temas dispostos na área de Álgebra, a BNCC dá ênfase ao objeto matemático "propriedades da igualdade", com a finalidade de que seja iniciado o desenvolvimento de habilidades relacionadas a esse conteúdo a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, de forma progressiva, até o 7º ano, momento em que os alunos começam a lidar com a equação polinomial do 1º grau (Brasil, 2018).

Há décadas na literatura, pesquisadores discutem as dificuldades de alunos e de professores na compreensão de conceitos ligados ao sinal de igualdade e às suas propriedades (Kieran, 1981; Teles, 2002; Lessa, 2005; Trivilin e Ribeiro, 2015; Barboza, 2019).

Encontramos, portanto, nas pesquisas de Teles (2002), Ponte, Branco e Matos (2009) e Oliveira e Fernández (2012) as propriedades da igualdade matemática, as quais compilamos, conforme Tabela 1.

Tabela 1.

Propriedades da Igualdade Matemática

Propriedade	Descrição	Exemplo
Reflexiva	Se um número é igual a outro, esse outro é igual ao primeiro.	Se a = b então b = a , para quaisquer elementos a e b.
Simétrica	Um número é sempre igual a ele mesmo.	a = a, para todo o elemento.
Transitiva	Se um número é igual a outro e esse outro é igual a um terceiro, o primeiro é igual ao terceiro.	Se a = b e b = c, então a = c para quaisquer elementos a, b e c.

Princípio Aditivo	Se dois números são iguais, ao adicionarmos ou diminuirmos a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais.	$a = b \rightarrow a + c = b + c$ $a = b \rightarrow a - c = b - c$
Princípio multiplicativo	Se dois números são iguais, ao multiplicarmos ou dividirmos (exceto pelo zero, no caso da divisão) a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais.	$a = b \rightarrow a . c = b . c$ $a = b \rightarrow a/c = b/c\ (c \neq 0)$

Diante do exposto, verificamos que a BNCC apenas menciona os princípios aditivo e multiplicativo na proposta curricular, o que consideramos como uma lacuna, em vista da igualdade e suas propriedades envolvem várias acepções, por ser um conceito polissêmico e gerar diversos tipos de dificuldades conceituais, como explanam Ponte, Branco e Matos (2009). Isso acarreta na necessidade de haver mais estudos e pesquisas sobre esse objeto matemático no ensino e na aprendizagem da álgebra.

Na sequência, passamos a descrever o modelo teórico e analítico MTSK que utilizamos para fundamentar nossa pesquisa e analisar os dados empíricos.

O modelo mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK)

O MTSK é um modelo decorrente do refinamento das ideias sobre a base de conhecimentos necessários para a docência de Shulman (1986, 1987) e do *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames e Phelps (2008).

Shulman (1987) considera o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) como de fundamental importância para o ensino e a aprendizagem docente. Contudo, a base proposta por esse pesquisador é voltada para a docência de forma geral, no qual foi reconfigurada para a área da matemática por Débora Ball e colaboradores.

Assim, o grupo de pesquisa SIDM, da Universidade de Huelva, na Espanha, constatou alguns problemas operacionais na delimitação dos subdomínios do MKT e refinou o modelo, defendendo que todo o conhecimento do professor de matemática é especializado (Carrillo *et al*, 2014; Mello; Junior; Wielewski, 2017). Dessa forma, originou o modelo MTSK, o qual é dividido em dois domínios: MK, que engloba os conhecimentos matemáticos para o ensino, e o PCK, que classifica os conhecimentos didáticos de conteúdo, de acordo com a figura 1.

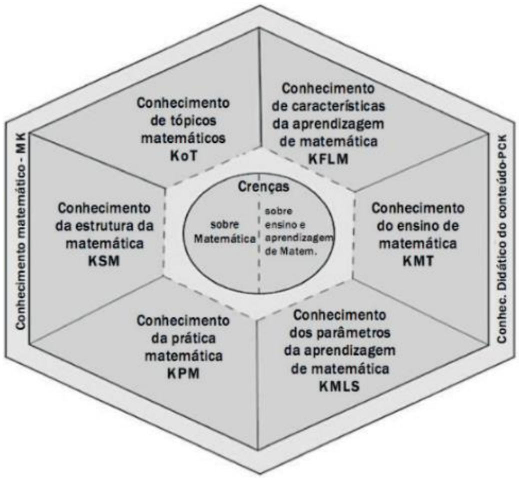


Figura 1.

MTSK (Carrillo et al, 2014, tradução de Moriel Junior e Wielewski, 2017, p. 130)

Esses domínios são subdivididos em três "focos de atenção" (Ribeiro, 2021), a saber, no MK: o subdomínio KoT (conhecimento dos conteúdos matemáticos), que se refere aos procedimentos, fenomenologia, definições, conceitos e registros de representações; o KSM (conhecimento das estruturas da matemática), em que se revelam o conhecimento das conexões interconceituais com conteúdos matemáticos passados e futuros; e o KPM (conhecimento da prática matemática), relacionado ao conhecimento das demonstrações, justificativas de procedimentos, validações matemáticas.

No domínio PCK, temos o KFLM (conhecimento das características de aprendizagem), em que se encontram os conhecimentos das potencialidades, dificuldades, obstáculos, erros dos alunos com relação ao conteúdo matemático; o KMT (conhecimento do ensino da matemática), que relaciona os recursos, as tarefas, as ajudas, os exemplos voltados ao ensino da matemática, e, por fim, o KMLS (conhecimento dos padrões e níveis de ensino), que corresponde ao conhecimento dos padrões e níveis de aprendizagem esperados dos alunos, e que são propostos pelos documentos oficiais, internacionais e de outras fontes.

No centro do modelo, há o domínio "Crenças", no qual encontram-se as crenças sobre a matemática e o ensino e a aprendizagem dessa ciência, em que permeiam e influenciam todos os outros subdomínios.

Apesar da delimitação apresentada nesse modelo, todos os subdomínios são interligados e complementares entre si, servindo as divisões apenas para fins analíticos (Carrillo; Martin, 2019; Ribeiro, 2022).

Como já mencionado, neste trabalho utilizamos o modelo MTSK para categorizar e analisar os dados obtidos no momento formativo, conforme descrito no próximo tópico.

Percurso metodológico

A pesquisa tem abordagem qualitativa na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), em que o ambiente natural é tomado como fonte direta para produção dos dados; o investigador é o instrumento principal; o interesse se concentra no processo mais que nos resultados; os dados são descritivos e analisados indutivamente, e o significado tem primazia; bem como nos fundamentamos nas observações de Oliveira (2011), porque buscamos compreender o objeto de estudo delimitando lugar, tempo, revisão de literatura e coleta de dados.

No processo formativo, participaram 6 licenciandos de matemática (LCs) de uma universidade pública do estado de Pernambuco, os quais cursavam a disciplina Estágio Supervisionado Obrigatório III, que é oferecida no penúltimo semestre do curso. Também esteve presente o professor da disciplina (PF), que acompanhou as atividades envolvidas.

Informamos que, na turma, constavam 19 estudantes, porém, após o convite feito pelo professor que ministrava a disciplina, apenas seis compareceram ao momento de formação.

O momento das atividades ocorreu no processo formativo em dois encontros ajustados entre o pesquisador e o professor da disciplina. O primeiro foi para aplicação de um questionário exploratório (que não está sendo analisado neste artigo), e o segundo para aplicação da Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), em que os 6 estudantes mencionados participaram.

A TAP trata-se de um artefato construído com potencialidades para provocar discussões matemáticas e didáticas, de acordo com o modelo das Oportunidades de Aprendizagem Profissional, PLOT (acrônimo da designação em inglês *Professional Learning Opportunities for Teachers)*, na concepção de Ribeiro e Ponte (2020).

Ressaltamos que o pesquisador não interveio nas interações discursivas entre os participantes, nem na plenária. Ele teve o papel de colaborar na construção da TAP e no desenho do processo formativo com o professor da disciplina (PF), de distribuir as tarefas no momento formativo e proceder às gravações em áudio das interações discursivas.

De acordo com Ribeiro e Ponte (2020), o modelo PLOT é composto por três domínios que estão interligados: PAF (Ações do Professor Formador), TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional) e IDP (Interações Potenciais Discursivas), conforme Figura 2.

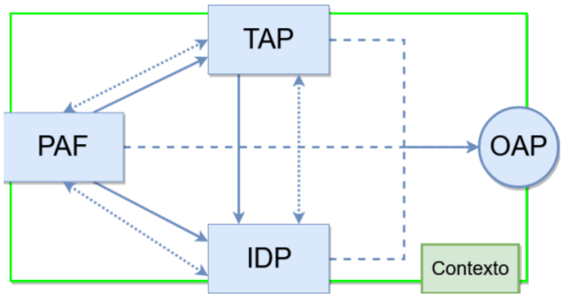


Figura 2.

Modelo PLOT, Ribeiro e Ponte (2020, p. 4)

Na visão desses autores, os domínios do modelo se desdobram em dimensões conceituais e operacionais, devendo ser considerados como de suma importância os seguintes aspectos:

a) Domínio das PAF: aproximação da matemática universitária com a matemática escolar; articulação entre essa ciência e a didática; construção de um ambiente de formação exploratório; orquestração de discussões didáticas e matemáticas ao se pensar a aprendizagem docente;

b) Domínio das TAP: as especificidades do conhecimento profissional docente, para explorá-las nas tarefas matemáticas; um ambiente de ensino e de aprendizagem exploratório; utilização de tarefas de alto nível cognitivo; o papel dos registros de prática, com o uso de vídeos etc.

c) Domínio das IDP: promoção de discussões matemáticas e didáticas; envolvimento dos professores para que desenvolva a argumentação e a justificação nas discussões em torno das tarefas; uso de linguagem científica correta e adequada para o ensino; a relevância da comunicação dialógica entre os professores e seus alunos (Ribeiro; Ponte, 2020).

Além dessas dimensões, o modelo PLOT é constituído de três fases operacionais: (1) Organização: momentos em que o formador elabora o processo formativo (seja no todo ou em partes) e constrói o design da(s) TAP e dos potenciais IDP. (2) Desenvolvimento: momentos em que os participantes (formador e formandos) passam a interagir entre si, mediados pelo uso da(s) TAP e pela concretização das IDP. (3) Finalização: momento em que, por meio processo aglutinador entre as três dimensões (PAF, TAP e IDP), se efetiva a(s) OAP. (Ribeiro; Ponte, 2020, p. 4).

No nosso caso, observamos essas fases para o desenho do momento formativo, da seguinte forma: na fase 1 (organização), o professor formador (PF) construiu a TAP com a colaboração do pesquisador, cujo instrumento constou de uma tarefa matemática (TM), destinada a alunos do ensino fundamental e de seis itens no âmbito dos conhecimentos dessa ciência e didáticos, correlacionados aos subdomínios do MTSK e atrelados ao objeto matemático “propriedades da igualdade”.

A escolha da tarefa a ser direcionada aos alunos do ensino fundamental teve como critério as séries em que os licenciandos atuavam no estágio obrigatório, bem como a proposta que a BNCC faz para o ensino das propriedades da igualdade, que vai do 3° ano ao 7.° ano do Ensino Fundamental.

Na fase 2 (desenvolvimento), a tarefa matemática (TM) foi distribuída aos 6 LCs para ser resolvida individualmente.

Neste artigo, devido à limitação de espaço, analisaremos apenas a resolução dessa tarefa matemática pelos licenciandos.

Após a devolução dos protocolos escritos referentes à TM, iniciou-se a gravação em áudio das interações discursivas (IDP) que ocorreram nos dois grupos (G1 e G2), comportando 3 licenciandos cada grupo. Nessa fase, os grupos resolveram a segunda parte da TAP; na fase três (finalização), foi realizada uma plenária (PL), em que os dois grupos, mediados pelo professor da disciplina (PF), discutiram coletivamente os itens da TAP.

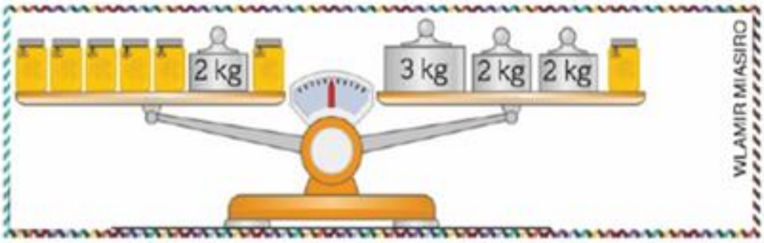
Ribeiro e Ponte (2020) indicam, quanto à estrutura das TAP, que elas devam ser arquitetadas com intenção de permitir aos formandos explorarem tarefas da matemática escolar nos seus enfoques matemáticos e didáticos. Dessa forma, construímos a TAP em duas partes, sendo a primeira uma tarefa para estudantes do ensino fundamental (figura 3), no qual foi apresentado o desenho de uma balança de dois pratos, utilizada na maioria dos livros didáticos que tratam sobre as propriedades da igualdade (Teles, 2002), usada para denotar o sentido de equilíbrio e o conceito de equivalência (Lessa, 2006), considerando como justificativa o que essas autoras ressaltam, quanto à importância desses conceitos e metáforas para o entendimento das equações.

Assim, a pergunta proposta para resolução pelos licenciandos foi: “Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado.”

Um professor de matemática apresentou a seguinte situação: "Na feira municipal, uma banca de doces, produzidos por agricultores da região, utiliza uma balança de dois pratos para indicar a quantidade de produto que o consumidor está comprando. A comerciante colocou potes de doces todos do mesmo formato e com a mesma quantidade em uma balança que está em equilíbrio, como mostrado na imagem."

O professor explicou à turma que a balança de dois pratos é um objeto que foi muito utilizado pelo comércio no passado, antes de surgirem as balanças digitais.

Então, o professor pediu para que os estudantes encontrarem o peso de cada pote de doce e, em seguida, perguntou o que aconteceria com a balança se: 1) a comerciante retirasse um peso de 3 kg do prato da direita; 2) a comerciante retirasse pesos de 2 kg de cada lado; 3) a comerciante retirasse um peso de 2 kg do prato da direita e um pote de doce do lado esquerdo.



Fonte: adaptado de Santos, Azevedo e Rodrigues (2020, p. 61)

Figura 3.

Tarefa matemática (Santos, Azevedo e Rodrigues, 2020, p.61)

Na segunda parte da TAP, foram incluídos seis itens, conforme Figura 4, que traziam intencionalmente os aspectos matemáticos e didáticos com a finalidade de promover discussões e reflexões dos futuros professores.

<u>2ª parte: (em grupo)</u>

Quatro alunos resolveram a questão assim:

Um aluno respondeu que cada pote de doce tem 2 kg.

Outro falou que, se retirar um peso de 3 kg do prato da direita, a balança permanecerá em equilíbrio.

O terceiro afirmou que, se a comerciante tirar o peso de 2 kg do prato da direita e 2 kg do da esquerda, a balança volta a ficar em equilíbrio.

O quarto disse que, se a comerciante retirar um peso de 2 kg do prato da direita e um pote de doce da esquerda, a balança volta a ficar em equilíbrio.

a) Você concorda com as respostas dos quatro alunos acima? Justifique.

b) Em qual ano escolar essa questão poderia ser aplicada? Por quê?

c) Você faria alguma adaptação nessa atividade? Qual? Por quê?

d) Que recursos (físicos ou digitais) você usaria para ensinar essa tarefa aos alunos no ensino fundamental? Justifique.

e) Quais conceitos você identificou que a tarefa aborda?

f) Indique uma tarefa que você trabalharia com os alunos após executar a tarefa da balança.

Figura 4.

Segunda parte da TAP (autores)

Com essas informações, passamos aos resultados produzidos nas resoluções escritas, nas transcrições dos áudios e na análise dos dados.

Resultados e análise dos dados

Neste artigo, como antes já justificado, levando em consideração a limitação de espaço, apresentamos apenas os resultados da primeira parte da TAP, que está relacionada à resolução individual e às discussões em torno da tarefa matemática (TM) nos grupos, como também na plenária. Na Tabela 2, apresentamos a codificação das categorias que emergiram da resolução da TM e das discussões em torno dela: KoT (conhecimento dos conteúdos matemáticos) e KPM (conhecimento da prática matemática):

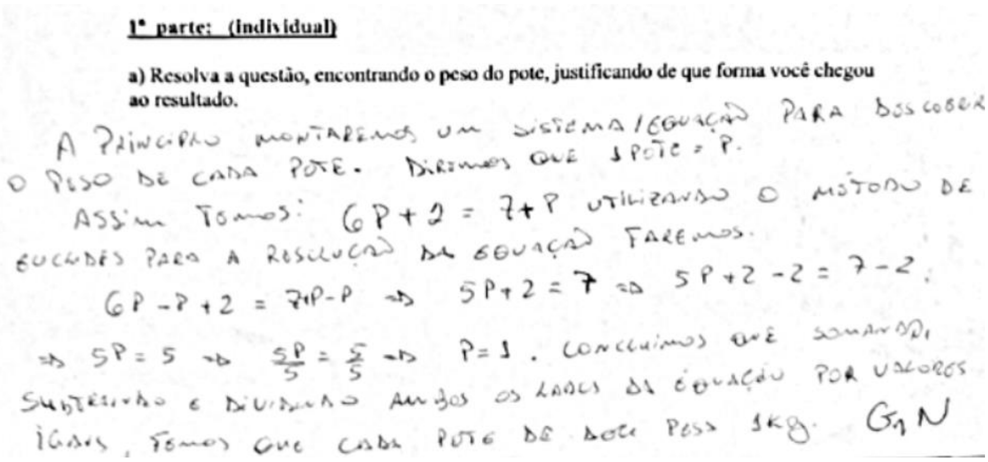
Tabela 2**.**

Categorias do MTSK das propriedades da igualdade

Subdomínios do MTSK	Descritores	Códigos
KoT	Propriedades	KoT1
KoT	Procedimentos	KoT2
KoT	Registros de representações	KoT3
KPM	Uso correto dos símbolos	KPM1
KPM	Justificações matemáticas	KPM2

Inicialmente, verificamos que todos os licenciandos encontraram o valor correto do pote, utilizando letras para designar a incógnita (termo desconhecido), o que revela indícios de que possuem o conhecimento KoT2 (procedimentos), mas nem todos justificaram o procedimento usado ou como chegaram ao resultado.

No entanto, identificamos que quatro LCs resolveram a TM pela técnica comentada por Almeida (2017), ou seja, a transposição de termos entre os membros da equação com troca de sinal (KoT2), e apenas dois (LC2 e LC3) utilizaram as propriedades da igualdade, revelando os conhecimentos KoT1 (propriedades) e KoT2 (procedimentos), conforme observamos, como exemplo, no protocolo de resolução do licenciando L3 na Figura 5.



1ª parte: (individual)

a) Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado.

A PRINCIPIO MONTAREMOS UM SISTEMA/EQUAÇÃO PARA DESCOBRIR O PESO DE CADA POTE. DIREMOS QUE 1 POTE = P.
ASSIM TEMOS: $6P + 2 = 7 + P$ UTILIZANDO O METODO DE EUCLIDES PARA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO FAREMOS.
$6P - P + 2 = 7 + P - P \Rightarrow 5P + 2 = 7 \Rightarrow 5P + 2 - 2 = 7 - 2$.
$\Rightarrow 5P = 5 \Rightarrow \frac{5P}{5} = \frac{5}{5} \Rightarrow P = 1$. CONCLUIMOS QUE SOMANDO, SUBTRAINDO E DIVIDINDO AMBOS OS LADOS DA EQUAÇÃO POR VALORES IGUAIS, TEMOS QUE CADA POTE DE DOCE PESA 1KG. G1N

Figura 5. *Resolução da TM do licenciando LC3 (G1)*

Identificamos que o licenciando LC3 utilizou as propriedades da igualdade na resolução da equação, além de citá-las, explicando a forma como usou o método, evidenciando assim o KPM2 no âmbito da prática matemática, conforme caracterização de Moriel Júnior e Carrillo (2014), indicando o que foi explicado por Cabanha (2018) sobre a diferença entre o conhecer o procedimento (KoT3) e o justificá-lo (KPM2).

LC3 também usou vários registros de representação na resolução da TM, qual sejam, as linguagens: natural, numérica e algébrica, revelando, assim, indícios de conhecimento KoT3, e que possui experiência sobre a interpretação da tarefa e o contexto apresentado (KoT4), além do uso correto dos símbolos, o que manifesta maturidade na prática matemática (KPM) (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021).

Compreendemos, assim, que o LC3 revela conhecimento no âmbito do pensamento algébrico, conforme caracterização proposta por Almeida (2016): estabelecer relações, operar com o desconhecido e construir significado, que se encontra, nesse caso, no âmbito do conhecimento do conteúdo matemático (KoT).

Nas interações discursivas do grupo G1, conforme excerto G1[9-11], observamos que o licenciando LC3 sugere ao grupo outra forma de resolução para a tarefa, ao qual denomina de “por observação”. Com base nisso, entendemos que o licenciando se referiu à compreensão do equilíbrio da balança, indicado por Lessa (2005) como fator primordial para compreensão do princípio de equivalência no trabalho com a equação do primeiro grau:

> 9 LC3: “Eu gerei uma forma algébrica, considerei ter o valor do pote que é o valor de x, que ficou 6x + 2 = 7 + x. Esse x acabou sendo igual a 1. Seria outra forma de observação, ele tirava 2 kg de um pote de um lado, 2 kg de outro, aí

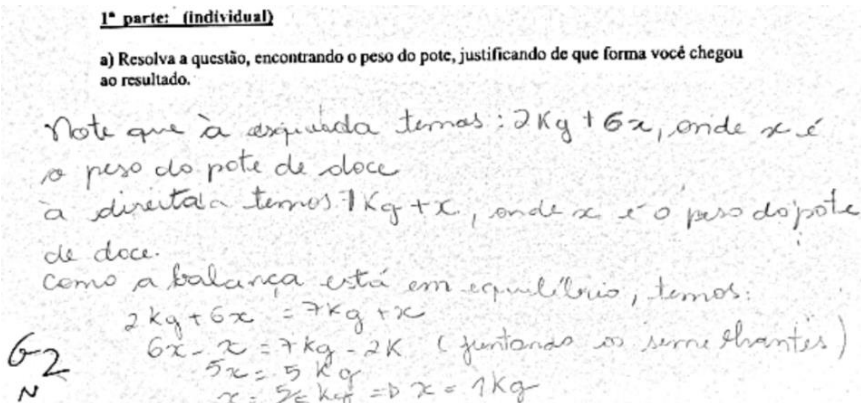
sobrariam cinco potes de 5 kg. Cada pote seria 1 kg. São duas observações para serem seguidas. Uma por observação e a outra por fator algébrico.”

10 LC1: “Esse só fiz pela álgebra mesmo.”

11 LC2: “Eu defini os potes como x, que é um valor desconhecido, e, como ambos os lados estão em equilíbrio, têm o mesmo valor. Então, peguei seis potes do lado esquerdo: 6x + 2 = 7 + x, já que o lado direito só tem um pote de doce, aí cheguei no valor de 1kg.”

Identificamos, assim, indícios de que houve uma oportunidade de aprendizagem profissional (OAP), pois, quando o licenciando LC3 indica haver resolvido a tarefa com outro tipo de procedimento, e apresenta ao grupo como realizou, os outros licenciandos passam a refletir sobre isso, possivelmente, mudando o entendimento ou a prática matemática, como identificamos na análise de um excerto da plenária.

Dessa forma, compreendemos que o momento descrito no excerto indica os potenciais interações dialógicas entre os participantes como promotoras das OAP, de acordo com a perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020).


1ª parte: (individual)

a) Resolva a questão, encontrando o peso do pote, justificando de que forma você chegou ao resultado.

Note que à esquerda temos: 2Kg + 6x, onde x é o peso do pote de doce
à direita temos 7Kg + x, onde x é o peso do pote de doce.
Como a balança está em equilíbrio, temos:
2kg + 6x = 7kg + x
6x - x = 7kg - 2K (juntando os semelhantes)
5x = 5 kg
x = 5/5 kg => x = 1kg

G2

Figura 6.

Resolução da TM da licencianda LC4 - G2(autores)

Em relação ao grupo G2, como se observa na figura 6, a licencianda LC4 utilizou a técnica de passagem de termos entre os membros da equação, mas também identificou o equilíbrio da balança para entender a tarefa quando mencionou: “Como a balança está em equilíbrio...”.

Dessa forma, ainda que não tenha expressado formalmente as propriedades da igualdade, a licencianda LC4 identificou o equilíbrio da balança e fez a analogia com o princípio de equivalência (Lessa, 2005), revelando indícios de conhecimento KoT1 (propriedades) e KoT2 (procedimentos), o que é entendido por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) como indício de desenvolvimento do pensamento algébrico.

A licencianda LC4 também procedeu à resolução da TM utilizando três registros de representação (linguagem natural, numérica e algébrica), evidenciando o conhecimento KoT3, que Moriel Júnior e Carrillo (2014) entendem como indício de conhecimento especializado do professor no domínio do conteúdo matemático.

Verificamos que, no áudio da reunião do grupo G2, não houve discussão sobre como os participantes resolveram a TM, ou seja, o grupo 2 passou a discutir logo o item “a” da segunda parte da TAP (que não está sendo analisado aqui neste trabalho).

Na plenária, o professor formador (PF) questionou de que maneira os participantes resolveram a tarefa matemática, conforme excerto PL [13-32]:

13 LC1: “O meu colega observou que, se ele tirar 2 kg e um pote de um lado, e 2 kg e um pote do outro, se ele tirar pesos iguais dos 2 lados, você vê que 5 potes vão dar igual a 5 quilos, ou seja, cada pote é igual a 1 kg.”
14 LC4: “A gente fez mais na linha da álgebra. Quando resolveu a questão, colocou como x o valor que a gente não sabia, somou e fez o jogo de sinal.”
15 PF: “Nesse caso, você está chamando de álgebra colocando um x? Qual seria a substituição que vocês fariam? O que vocês fizeram? Vocês substituíram o quê pelo x?”
16 LC4: “O pote, porque, se de um lado havia um pote só, a gente já poderia chamar aquele pote de x. O peso daquele pote, no caso, seria 1x, e no outro lado havia 6 potes, que a gente não sabia o peso deles, então chamamos o peso do pote de x, como vimos que a balança estava em equilíbrio, o que tinha em um lado era igual ao que tinha no outro, aí, fizemos operações com álgebra, no caso, usamos um valor desconhecido.”
17 PF: “Quais foram as operações que vocês fizeram para encontrar o valor de x?”
18 LC4: “A gente usou a soma dos 2 lados, multiplicando 1/5 e encontramos o peso do pote que é igual a 1 kg.”
19 PF: “E vocês? Como foi que vocês fizeram para encontrar?” (se dirigindo ao grupo 1).
20 LC3: “A primeira, eu fiz por álgebra mesmo, e depois eu vi que poderia sair de outra forma. No momento em que você tem 2 kg e um pote juntinho de um lado, e 2 kg e um pote juntinho do outro, você sabe que aquilo ali tem o mesmo peso. Aí, você retira, mantém o equilíbrio, então você passa a ter 5 potes e um peso de 3 e outro de 5, um peso de 3 e outro de 2 , você tem 5 potes igual a 5 kg, 5 potes iguais, então seria mais como observação, ou seja, para o aluno que não conhece álgebra ainda, mas, por observação, por manipulação ele conseguiria perceber isso.”
21 PF: “Vocês percebem se tem alguma coisa que é próximo do método que o outro grupo utilizou? Quais as ideias que são próximas?”
22 LC1: “Subtrair dos 2 lados?”
23 PF: “Subtrair o quê dos 2 lados?”
24 LC1: “A mesma quantidade.”

25 PF: “Só que, nesse caso que LC1 falou, ele está usando a mesma representação que o problema, e vocês fizeram uma transposição de representação?”
26 LC4: “Mas, nesse caso, quando é dada a questão dos pratos, um lado já tem os 2 kg que é identificado, e no outro lado que eu acho que foi assim que LC1 observou, em um lado tem os 2 kg, o que tem na questão e no outro lado tem 3 kg, 2 kg e 2 kg, no caso você tirou um daqueles 2 kg, foi isso?”
27 LC1: “Mais o pote.”
28 LC4: “Ah, mais o pote!”
29 LC1: “Isso, mais o pote.”
30 LC4: “Ficaram 5 kg.”
31 LC1: “Sim, e do outro, eu tirei 2 kg mais um pote e ficaram 5 potes, deixar só potes de um lado, atribuir valor a cada um.”
32 LC4: “Ah, entendi! Deixaram só potes de um lado, isso é superinteressante!”

Verificamos, por meio desse excerto proveniente da plenária (PL), que as interações discursivas (IDP), orquestradas pelo professor formador (PF), revelaram indícios de aprendizagem dos futuros docentes pela frase emitida pela licencianda na linha 32: “Ah, entendi! Deixaram só potes de um lado, isso é superinteressante!”, indicando o que compreendera naquele momento.

Assim também, verificamos indícios de que ocorreram as OAP no momento da plenária da forma como, na linha 25, o PF aproveitou a fala do licenciando LC1 no tocante ao que ele (LC1) aprendera de outro colega (na linha 13, mostra quando LC1 cita a maneira com que o colega LC3 havia raciocinado, utilizando o princípio de equivalência).

Com esses resultados, identificamos as duas categorias que emergiram das resoluções e discussões em torno da tarefa matemática (TM): conhecimento do conteúdo das propriedades da igualdade e conhecimento da prática matemática ligada às propriedades da igualdade.

Passamos à discussão das categorias que emergiram das resoluções da tarefa matemática (TM) e das IDP em torno da tarefa matemática.

Categoria: conhecimento do conteúdo das propriedades da igualdade

Constatamos que a maioria dos licenciandos, no que se refere aos conhecimentos do conteúdo das propriedades da igualdade, não fazem uso do princípio aditivo/multiplicativo, possivelmente, porque tendem a olhar o sinal de igual apenas como “um lugar para colocar um resultado após”, em detrimento do sentido de “equivalência”, necessário para a compreensão, por exemplo, de um dos conceitos basilares da matemática que é a equação (Trivilin e Ribeiro, 2015; Teles, 2002; Lessa, 2005).

Compreendemos que apenas dois licenciandos revelaram conhecimento no âmbito do pensamento algébrico, conforme caracterização proposta por Almeida (2016) (estabelecer relações, operar com o desconhecido e construir significado), em vista de, na resolução da tarefa matemática, proceder a vários registros de representação e também por entender o contexto da tarefa e o sinal de igual com sentido de equivalência, conforme indicam Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Categoria: conhecimento da prática matemática ligada às propriedades da igualdade

Com relação à categoria "Conhecimento da prática matemática", compreendemos que todos os licenciandos resolveram a tarefa usando procedimentos, possivelmente, aprendidos no seu percurso como aluno da educação básica, fazendo uso da técnica de passagem para o outro membro, procedimento muito ensinado no passado, e ainda hoje constante em muito material didático. Além disso, a maioria dos futuros professores não justificaram a utilização do procedimento.

Considerações finais

Para responder nossa indagação inicial "que conhecimentos matemáticos e didáticos os futuros professores de matemática possuem e desenvolvem para o ensino das propriedades da igualdade em um momento formativo mediado por uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP)", propusemos um processo formativo combinado com o professor da disciplina Estágio Supervisionado Obrigatório (ESO III), e desenhado na perspectiva de Ribeiro e Ponte (2020).

Analisamos os dados descritivos advindos do momento formativo, por meio de comparações sistemáticas com o modelo MTSK, e observamos que os licenciandos revelaram conhecimentos profissionais relacionados aos subdomínios KoT e KPM, que emergiram como categorias empíricas na análise da primeira parte da TAP.

Além disso, verificamos que há predominância em procedimentos que se utilizam da técnica de passagem de um membro para outro em tarefas para encontrar a incógnita (termo desconhecido), em detrimento do uso das propriedades da igualdade, o que possivelmente se deve as formas como o futuro professor aprendeu quando aluno da escola básica.

Também entendemos que a maioria dos futuros professores ainda veem a Álgebra em uma concepção letrista (MEC, 1998), ou seja, consideram a Álgebra apenas como um ensino voltado para regras e técnicas, da mesma forma como indica a pesquisa de Lautenschlager e Balvin (2021).

Assim, com base nos resultados apresentados, verificamos as potencialidades das TAP como artefatos que revelam os conhecimentos profissionais dos formandos, instigam discussões matemáticas e didáticas em torno do objeto matemático estudado, promovendo reflexões e ampliação do conhecimento docente, ou seja, promovendo as Oportunidades de Aprendizagem Profissional (Ribeiro; Ponte, 2020).

Verificamos, ainda, a utilidade e potencialidade do modelo PLOT para organizar processos voltados para a formação inicial de professores de matemática.

Sugerimos que outras pesquisas sejam realizadas utilizando o modelo PLOT na formação inicial com outras configurações de Tarefas de Aprendizagem Profissional, e com outros objetos matemáticos, observando que, no nosso trabalho, a TAP foi direcionada apenas para o objeto "propriedades da igualdade".

Esperamos que este artigo venha fomentar mais reflexões, discussões e aprofundamento quanto à necessidade de serem promovidas Oportunidades de Aprendizagem Profissional desde a formação inicial de professores de matemática. Isso reflete em uma aproximação cada vez mais estreita entre a teoria e a prática, bem como da matemática universitária com a escolar, e, com isso, o aperfeiçoamento do conhecimento e da profissão docente para o ensino e a aprendizagem de qualidade que tanto almejamos.

Referências

Almeida, J. R. (2016). *Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade*. [Tese de doutorado em Ensino das Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco]. http://tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/7451/2.

Almeida, J.R. (2017). Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. *EM TEIA* – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 8 - número 1.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelpes, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59:389. http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Barboza, L.C. (2019) *Conhecimentos dos professores dos anos iniciais e o sinal de igualdade: uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional.* [Dissertação de Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC]. https://biblioteca.ufabc.edu.br/.

Blanco. M. M. G. (2003). Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas, SP : Mercado de Letras.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto editora.

Cabanha, D. D. S. C. (2018). *Conhecimento especializado de um formador de professores de matemática em início de carreira: o ensino a distância de derivada*. [Tese de doutorado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista]. htps://repositorio.unesp.br/handle/11449/180262

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones*, 1-18.

Carrillo, J., & Martín, J. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas como fruto del cambio. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 147-152.

D´Ambrósio, U. (2012). *Educação Matemática: Da teoria à prática*. 23. ed. Campinas: Papirus.

Ferreira, A.C. (2003). *Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática*. In: FIORENTINI, D. (Org.). Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP : Mercado de Letras.

Ferreira, M. C. N., Ribeiro, M., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. *Zetetiké*, *25*(3), 496-514.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Lautenschlager, E.A., & Balvin, F. A. (2021). Desvelando indícios de conhecimento especializado dos futuros professores do Rio Grande do Norte/Brasil para o ensino da álgebra com o modelo MTKS. *V Congresso Iberoamericano de Conocimiento Especializado Del Profesor de Matemáticas*. 3 -5 novembro, online. https://cdn.congresse.me/sxmuargybtxs0iebaimczzwt46zi.

Lessa, M. M. L. (2005). *Aprender álgebra em sala de aula: contribuição de uma sequência didática.* [Tese de doutorado em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco.]

Mello, G., Junior, J. G. M., & Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, *18*(2), 126-133.

Ministério da Educação (MEC). (2018). Secretariada Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/.

Ministério da Educação (MEC). (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Moriel-Junior, J. G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimiento especializado para ensinar matemática como modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*I (p. 465-474). Salamanca: SEIEM. https://www.researchgate.net/publication/272179007.

Oliveira, M.M. (2011). *Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses*. 5.ed. [rev.] - Rio de Janeiro: Elsevier.

Oliveira, K. I. M., & Fernández, A. J. C. (2012). Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM.

Oliveira, A. T. D. C. C. D., & Fiorentini, D. (2018). O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. *Revista Brasileira de Educação*, 23.

Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura Professional knowledge of mathematics teachers and the concept of function: a literature review. *Educação Matemática Pesquisa*: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 19(1).

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matematic*s: Teoría, critica y prática. Barcelona: Graó, p. 1-15. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/29194.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Portugal: Ministério da Educação-BGIdc, 92-115.

Ribeiro, A. J. (2019). Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: buscando articulações entre a escola básica e a universidade. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, v. 14, p. 117-129. http://funes.uniandes.edu.co/21602/1/Jacques2019Aprendizagem.pdf. Acesso: 5 abr. 2022.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. da. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetike*, 28, e020027. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 14, n. 35, p. 1-32.

Ribeiro, R. D. G. L. (2021). *Aspectos socioculturais e políticos na especialização do conhecimento do professor de Matemática: interfaces entre o Programa Etnomatemática e o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK)*. [Tese de doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista - Unesp]

Santos, W. S., Azevedo, S.G.M., & Rodrigues, M.U. (2020). *Matemática no 6º Ano do Ensino Fundamental na Perspectiva das Habilidades da BNCC/DRC* - Lucas do Rio Verde/MT. Livro eletrônico. https://www.lucasdorioverde.mt.gov.br/.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth In Teaching. *Educacional Researcher*, v. 15, p. 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, v. 57, n. 1, p. 1-23.

Teles, R. A. M. (2002). *A relação entre aritmética e álgebra na matemática escolar: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1º grau*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco.]

Trivilin, L. R., & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 29, p. 38-59.