

Figura geométrica no livro e o PCOC correspondente a mão livre: Uma gestão de códigos para a impressora 3D

Geometric figure in the book and the corresponding freehand PCOC: A code management for the 3D printer

Figura geométrica en el libro y el PCOC correspondiente a mano alzada: Gestión de códigos para la impresora 3D

Figure géométrique dans le livre et le PCOC correspondant à main libre : gestion des codes pour l'imprimante 3D

Afonso Henriques¹

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Doutorado

<http://orcid.org/0000-0002-8783-6008>

Rosane Leite Funato²

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Mestrado

<https://orcid.org/0000-0002-6799-0876>

Elisângela Silva Farias³

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Mestrado

<https://orcid.org/0000-0002-4052-2351>

Resumo

As Geometrias Plana, Analítica e Espacial, doravante designadas GEOPAES, enquanto disciplinas de Matemática exigem que os(as) estudantes sejam capazes de visualizar e interpretar figuras geométricas referentes aos saberes matemáticos a ensinar previstos nos livros didáticos. Como auxiliar o(a) Professor(a)⁴ no ensino e o(a) estudante na aprendizagem de saberes de GEOPAES, favorecendo a referida visualização e a interpretação no ensino em que esses livros são utilizados? Responder esse tipo de questão é um dos nossos objetivos neste artigo, que apresenta uma modelagem paramétrica e gestão de código de um material didático construído em ambiente computacional, materializado na impressora 3D, tornando-se palpável

¹ henry@uesc.br

² rffunato@uesc.br

³ esfarias@uesc.br

⁴ O autor defende que o termo Professor(a) será e deveria sempre ser escrito com a letra P maiúscula, pois este(a) é um(a) profissional que merece e deve ser respeitado(a) como os outros. O simples gesto de aplicar a letra maiúscula engrandece também a sua personalidade (Henriques, 2019, p. 13)

a “mão livre”. Essa modelagem e gestão são práticas usuais em pesquisas realizadas no GPEMAC⁵, no Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC, e vêm servindo o(a) Professor(a) no ensino e o(a) estudante na aprendizagem matemática, bem em outras disciplinas onde a GEOPAES encontra um habitat nessa instituição. Um PCOC (que se lê, “Peceocê”) impresso em 3D pode contribuir na identificação e reconhecimento de elementos geométricos notáveis no modelo, na manipulação e no seu posicionamento em relação ao sistema de coordenadas, na aplicação do procedimento “tomográfico” que examina as intersecções de superfícies que o delimitam, favorecendo a análise de traços e de curvas de níveis, entre outros procedimentos que podem ser utilizados pelo(a) Professor(a) e pelo(a) estudante. O modelo apresentado nesse artigo evidencia um tipo dessas intersecções por consequência do objeto geométrico observado nos livros didáticos.

Palavras-chave: Geometrias, Modelagem paramétrica, *Software maple*, Impressora 3D.

Abstract

Plane, analytical, and spatial geometries, which we refer to as GEOPAES, are mathematical topics that require students to visualize and interpret geometric figures related to the mathematical knowings to teach, as outlined in textbooks. How can we assist Teachers in their teaching and students in learning GEOPAES knowings, favoring such visualization and interpretation in the teaching that utilizes those books? Answering this type of question is one of our objectives in this article, which presents a parametric modeling and code management of a teaching material built in a computational environment, materialized in the 3D printer, becoming tangible by “free hand”. These modeling and management practices are standard in research carried out at GPEMAC, in the Laboratory of Mathematical Visualization (L@VIM) of UESC, and have been serving the Teacher in teaching and the student in learning mathematics, as well as in other subjects where GEOPAES is found in this institution. A 3D-printed PCOC can contribute to the identification and recognition of notable geometric elements in the model, in the manipulation and positioning of the model in relation to the coordinate system, in the application of the “tomographic” procedure that examines the intersections of surfaces that delimit it, favoring the analysis of traces and contour lines, among other procedures that the Teacher and the student can use. The model presented in this article highlights one type of these intersections, resulting from the geometric object observed in the textbooks.

⁵ Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional.

Keywords: Geometries, Parametric modeling, *Maple* software, 3D printer.

Resumen

Las Geometrías, Planas, Analíticas y Espaciales, en adelante GEOPAES, como materias de Matemáticas, requieren que los(as) estudiantes sean capaces de visualizar e interpretar figuras geométricas relacionadas con los conocimientos matemáticos a enseñar, previstos en los libros de texto. ¿Cómo ayudar al(a) la Profesor(a) en la enseñanza y al(a) la estudiante en el aprendizaje de los conocimientos GEOPAES, favoreciendo la mencionada visualización e interpretación en la enseñanza donde se utiliza estos libros? Responder a este tipo de preguntas es uno de nuestros objetivos en este artículo, en el que presentamos el modelado paramétrico y la gestión de código de un material didáctico construido en un ambiente computacional, materializado en la impresora 3D, haciendo tangible la “mano libre”. Esta modelización y gestión son prácticas habituales en las investigaciones realizadas en GPEMAC, en el Laboratorio de Visualización Matemática (L@VIM) de la UESC, y han estado al servicio del(de) la Profesor(a) en la enseñanza y del(de) la estudiante en el aprendizaje matemático, así como en otras materias donde GEOPAES encuentra un hábitat en esta institución. Un PCOC impreso en 3D puede contribuir a la identificación y reconocimiento de elementos geométricos notables en el modelo, manipulación y posicionamiento en relación con el sistema de coordenadas, en la aplicación del procedimiento “tomográfico” que examina las intersecciones de superficies que lo delimitan, favoreciendo el análisis de líneas y curvas de nivel, entre otros procedimientos que pueden ser utilizados por el(la) Profesor(a) y el(la) alumno(a). El modelo presentado en este artículo destaca un tipo de estas intersecciones como consecuencia del objeto geométrico observado en los libros de texto.

Palabras clave: Geometrías, Modelado paramétrico, Software de arce, Impresora 3D.

Résumé

Les Géométries Plane, Analytiques et Spatiales, ci-après dénommées GEOPAES, en tant que matières mathématiques, exigent que les étudiants soient capables de visualiser et d'interpréter des figures géométriques liées aux connaissances mathématiques à enseigner, prévues dans les manuels. Comment aider le Professeur dans l'enseignement et l'étudiant dans l'apprentissage des connaissances de GEOPAES, en favorisant la visualisation et l'interprétation susmentionnées dans l'enseignement où ce livre est utilisé ? Répondre à ce type de questions est l'un de nos objectifs dans cet article, dans lequel nous présentons la modélisation paramétrique et la gestion du code d'un matériel pédagogique construit dans un environnement

informatique, matérialisé dans l'imprimante 3D, le rendant tangible à "main libre". Cette modélisation et la gestion sont des pratiques courantes dans les recherches menées au GPEMAC, au Laboratoire de Visualisation Mathématique (L@VIM) de l'UESC, et ont servi le Professeur dans l'enseignement et l'étudiant dans l'apprentissage des mathématiques, ainsi que dans d'autres matières où les GEOPAES trouve son habitat dans cette institution. Un PCOC imprimé en 3D peut contribuer à l'identification et à la reconnaissance des éléments géométriques notables dans ce modèle, à la manipulation et au positionnement par rapport au système de coordonnées, dans l'application de la procédure « tomographique » examinant les intersections de surfaces qui le délimitent, favorisant l'analyse des traces et des courbes de niveau, entre autres procédures pouvant être utilisées par l'enseignant et l'étudiant. Le modèle présenté dans cet article met en évidence un type de ces intersections par conséquence de l'objet géométrique observé dans le manuel.

Mots-clés : Géométries, Modélisation paramétrique, Logiciel maple, Imprimante 3D.

Figura geométrica no livro e o PCOC Correspondente a mão livre: uma gestão de códigos para a impressora 3D

Dentre os diversos elementos constituintes do sistema social do ensino, a Noosfera, conforme designado por Chevallard (1992), o livro didático, doravante designado LD, se configura como um dos elementos consultados pelo Professor na sua prática efetiva, antes de entrar em sala de aula, contribuindo, portanto, para a organização dos objetos ensinados. Além disso, ocupando o segundo nível no processo da transposição didática, mostrado mais adiante, o LD, como elemento institucional (Henriques, Nagamine A, & Nagamine C, 2012, p. 1263), vem, ao longo dos anos, se constituindo como objeto de investigação em Educação, em especial, em Didática e Educação Matemática. Este elemento permite revelar as Organizações Matemáticas Dominantes (OMD), e conseqüentemente, as praxeologias dos objetos visados nas instituições de referências, nas quais são adotadas. Neste artigo, nos interessamos, particularmente pelas OMD no ensino de GEOPAES, partindo da hipótese de que as Geometrias Plana, Analítica e Espacial, como ramos ou disciplinas básicas de Matemática, exigem que os estudantes tenham uma visualização e interpretação de figuras geométricas previstas nos LD, seja no espaço uni ou bi, seja no espaço tridimensional.

Essa hipótese, centrada nas dificuldades de visualização e interpretação de objetos geométricos pelos estudantes, principalmente em três dimensões, em que as exigências são maiores, pelo fato de que o fenômeno “ver em 3D” se traduz em dificuldade da maioria de estudantes nos diversos níveis de ensino, já fora comprovada por vários pesquisadores em Didática da Matemática e Educação Matemática, interessados pelo ensino e aprendizagem de GEOPAES, dentre os quais podemos citar: Salazar, Vita e Almeida (2008), Palles (2012), Bridoux e Nihoul (2015), Marques (2016) e Ramos (2018). Esses pesquisadores mostram que o fenômeno persiste no decorrer dos anos, nas diferentes gerações. Sustentamos, com base na nossa experiência e nas pesquisas revisitadas, que o aprendizado do estudante também depende das condições do ensino e (ou) dos recursos didáticos que estão à sua disposição, assim como do Professor. Como auxiliar esse último no ensino e o estudante na aprendizagem de saberes de GEOPAES, favorecendo a visualização e a interpretação de figuras geométricas apresentadas em livros didáticos na instituição de ensino onde esses livros são utilizados?

Fornecer ao menos uma resposta a essa questão é um de nossos objetivos neste artigo, no qual apresentamos uma modelagem paramétrica e gestão de código de um recurso didático, inspirado na análise de uma figura geométrica proposta em um LD, produzido no ambiente computacional na perspectiva de PCOC (cf. Definição 5 mais adiante) e materializado na impressora 3D. Com essa materialização, um PCOC torna-se um material concreto manipulável a

“mão livre”, útil para o Professor no ensino, e para o estudante na aprendizagem de conceitos matemáticos correspondentes em GEOPAES.

Para isso, organizamos este artigo em cinco partes: na primeira, apresentamos onze definições importantes na compreensão do artigo, identificadas por Definição 1, Definição 2, e assim por diante, com citações ou definições nossas. A segunda parte consiste na escolha de uma instituição de referência, de um livro didático e de uma figura geométrica como objeto do saber proposto nesse livro que analisamos, descrevendo, por conseguinte, o tratamento algébrico necessário na modelagem paramétrica do PCOC associado a esse objeto, utilizando, inicialmente, as técnicas do ambiente *papel_lápis* (cf. Definição 2). Na terceira parte, apresentamos as potencialidades (Henriques, 2021b) do ambiente computacional que utilizamos nessa modelagem, a saber, o software *Maple*. Na quarta parte, implementam-se a modelagem e a gestão do código do referido PCOC (cf. Definição 5) para a impressora 3D, utilizando as potencialidades de ferramentas específicas desse software, estabelecendo-se assim, uma aliança entre o ambiente *papel_lápis* e o ambiente computacional mediando o tratamento algébrico realizado na segunda parte. Na quinta, sendo a última parte, apresenta-se o processo da configuração do PCOC, também denominado fatiamento, em um software intermediário entre o software de produção do modelo e a impressora 3D, obtendo-se assim, o modelo para a impressão em 3D e as considerações finais.

Assim, além de respondermos à questão motora deste artigo, a modelagem paramétrica implementada aqui pode servir de referência para a produção de outros PCOC como materiais didáticos manipuláveis a “mão livre” úteis no ensino e na aprendizagem de saberes matemáticos, utilizando o software *Maple* ou qualquer outro software munido de potencialidades similares, replicando assim a referida modelagem e gestão de código para a impressora 3D.

Algumas definições iniciais

Em toda ciência, as definições são entendidas como formas de explicar os conceitos ou sentidos de palavras, termos, expressões ou até mesmo de pensamentos ou ideias colocadas em jogo. Assim, julgamos fundamental que um artigo torne explícitos os termos utilizados pelos autores no desenvolvimento do trabalho, favorecendo ao leitor uma compreensão paritária dos conceitos colocados em prática na obra. Neste artigo, apresentamos as definições de: transposição didática; figura geométrica; PCOC; crivo geométrico; ambiente *papel_lápis*; ambiente computacional; visualização; modelagem paramétrica; gestão de código para a impressão 3D, e material concreto manipulável a “mão livre” que colaboram nos discursos que empregamos.

Começamos com base nas concepções de Duval (1993, 1995), sublinhando que contrariamente à noção da visão, que fornece um acesso direto a um determinado objeto observado a olho nu, a visualização definida a seguir é um processo cognitivo mais complexo e fundamental no desenvolvimento de competências, em especial, matemáticas.

Definição 1: A visualização é uma competência cognitiva, baseada na produção e mobilização mental de uma representação semiótica de um objeto do saber, e controla a organização das relações entre unidades figurais significativas dessa representação, podendo ser externada em um dado registro (nossa definição).

Por exemplo, na tarefa “descrever, na língua materna, a superfície de equação dada por $mx^2 + ny^2 - pz^2 - q = 0$, sendo m, n, p e q números reais não nulos” (Henriques, Farias, Funato, 2024, p. 19), os estudantes em cursos universitários de Cálculo Diferencial e Integral revelam dificuldades para fornecer a descrição requerida, que se manifesta pela ausência da produção e mobilização mental da representação semiótica correspondente a tal equação no registro gráfico. Eles não conseguem, imediatamente, visualizar e associar essa equação à forma reduzida da equação do hiperbolóide de uma folha que estudaram em Geometria Analítica.

Referindo-se aos registros de representação semiótica no contexto de Duval (1993, 1995, 2012), Henriques e Almouloud (2016) destacam quatro registros predominantes em Matemática, notadamente: a língua materna, o registro algébrico, o registro gráfico e o registro numérico, dotados de signos próprios e regras de conformidades que os distinguem entre si.

A Definição 1, portanto, colabora com a nossa problemática e hipótese, no que diz respeito à aprendizagem em GEOPAES, mobilizando diferentes registros de representação semiótica, e consequentemente a transposição didática. Nessa perspectiva, Chevallard (1985) teve uma grande contribuição ao disseminar na comunidade acadêmica o conceito da transposição didática, a partir de um curso ministrado na primeira escola de verão da Didática de Matemática realizada em Chambrousse (França), em julho de 1980. Podemos traduzir a ideia apresentada pelo autor na Definição 2 a seguir.

Definição 2: A transposição didática é o processo de transformação que um dado objeto do saber sábio sofre com a finalidade de ser um saber ensinado e consequentemente aprendido (Chevallard, 1985, tradução nossa).

Conforme esquematizado na Figura⁶ 1, o processo da transposição didática contempla essencialmente quatro níveis ou escalas que exprimem os estágios e a dinâmica de um dado

⁶ Chamamos atenção ao termo “Figura” empregado em Textos Acadêmicos (TA), tendo em vista a noção de figura geométrica descrita na Definição 6. Em TA, o termo “Figura” numerado sequencialmente indica o espaço reservado no texto no qual é apresentado um objeto ou esquema ilustrativo que não é necessariamente uma figura geométrica.

objeto do saber, pensado, criado ou descoberto, inicialmente por cientista(s).

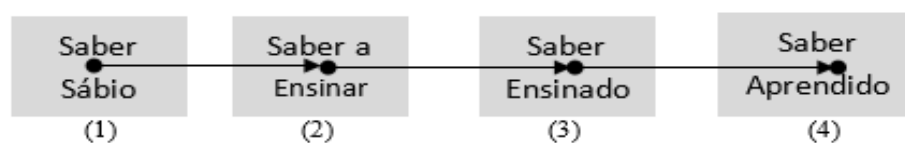


Figura 1.

Processo da Transposição Didática (Henriques, 2019, p. 103)

O **saber sábio** (nível 1) é um conhecimento extraescolar ou acadêmico que precede culturalmente o trabalho científico. Trata-se do saber de referência sábio, fruto de descobertas pessoais ou de grupos de pessoas, cientistas etc. O **saber a ensinar** (nível 2) é um saber descrito ou proposto em *livros didáticos* e (ou) em outras fontes literárias, resultado do saber sábio. **Saber ensinado** (nível 3) é o saber organizado pelo Professor com base no saber a ensinar. **Saber aprendido** (nível 4) é o conhecimento adquirido pelo estudante a partir do saber ensinado, organizado pelo Professor, em uma determinada instituição de referência.

Dois termos que emergem na descrição do processo da transposição didática que merecem uma atenção: o **saber** e o **conhecimento**, que parecem confundirem-se entre si. Ora, apoiados em trabalhos de Brousseau (1998), torna-se importante especificarmos a diferença entre esses termos. O **saber** é um meio social e cultural que permite identificar, organizar, validar e empregar conhecimentos. O **conhecimento**, por sua vez, é o ato ou capacidade humana de entendermos os fatos, necessário para resolver os problemas que se esperam ser dominados pelo sujeito, em particular estudantes: alguns conhecimentos não são explicitáveis, outros são os saberes ensinados (nível 3) convertidos em meios ou estratégias de resolução de problemas.

Neste artigo, damos atenção particular ao saber proposto no segundo nível como fonte do Professor, e revelador de Organizações Matemáticas Dominantes (OMD) nas instituições, saber este que é geralmente praticado em sala de aula tanto pelo Professor quanto pelos estudantes, mediante a mobilização de técnicas usuais dos ambientes papel lápis e(ou) computacional.

Definição 3: Um **ambiente papel lápis** é um espaço usual de estudo constituído por ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente. (Henriques, 2019, p. 26). Articular as práticas realizadas mediante a aplicação das técnicas e ferramentas do ambiente papel lápis com o trabalho equivalente implementado em um ambiente computacional (Definição 4) pode contribuir positivamente na potencialização e aprendizagem dos saberes matemáticos visados.

Definição 4: Um **ambiente computacional** é o espaço virtual de estudo constituído de

ferramentas como: o computador, o software, a internet, a calculadora, a Impressora 3D, etc. (Henriques, 2019, p. 26)

A mobilização das técnicas de realização de tarefas de GEOPAES em diferentes registros de representação semiótica nos dois ambientes de aprendizagem, e a relação entre elas quando os dois ambientes se entrelaçam nas atividades instrumentais, exerce um papel preponderante na modelagem paramétrica de um PCOC (Definição 5). Isso significa que o Professor deve lidar muito bem com o saber a ensinar (nível 2) para organizar melhor o saber ensinado (nível 3), utilizando as técnicas do ambiente papel lápis. Pois, estes conhecimentos favorecem uma modelagem pertinente de PCOC em um ambiente computacional. Mas, o que é um PCOC?

Definição 5: Um **Projeto de Construção de Objetos Concretos (PCOC)** é um modelo matemático descritivo idealizado a partir da análise de uma tarefa (exercício, exemplo, problema) institucional que resulta em um objeto construído com materiais concretos e (ou) com auxílio de um ambiente computacional de aprendizagem (Henriques, 2019, p. 32).

Em condições normais da transposição didática, um PCOC pode ser modelado a partir de uma figura geométrica proposta nos saberes matemáticos a ensinar (nível 2), isto é, nos livros didáticos ou em outras fontes literárias, ou ainda elaborado a partir da idealização do Professor com base na organização do saber ensinado (nível 3). No âmbito de construções geométricas, em ambiente papel lápis, são classicamente consideradas as relações entre desenho e figura geométrica. O desenho quando já traçado, representa o mundo sensível de um objeto que o matemático denomina de figura geométrica e que intervém no raciocínio intelectual. Assim, desenho em Matemática é uma representação de uma figura geométrica, que definimos como segue.

Definição 6: Um desenho é um traçado em uma folha de papel ou na tela de um computador. Quando um desenho representa um objeto matemático (triângulo, paralelogramo, por exemplo), é denominado de figura geométrica.

Chaachoua (1997) mostra que o desenho adota alternadamente diferentes estatutos no ensino. É considerado como um objeto físico em si mesmo, como uma representação de um objeto geométrico (figura geométrica) ou de um objeto físico.

Nesta perspectiva, Parzysz (2002, p. 85) postula a coexistência de dois paradigmas geométricos dos quais o Professor deve tomar consciência, para favorecer a aprendizagem em Geometria, para os seus estudantes:

uma geometria espaço-gráfica (G1), na qual os objetos em jogo são de natureza física (maquetes, desenhos, imagens na tela, ...) e as validações do tipo perceptivo (ponto de vista, medida). Uma geometria proto-axiomática (G2), na qual os objetos em jogo são de natureza teórica e as validações do tipo hipotético-dedutivas.

Portanto, o desenho pode ser uma interface entre as facetas da Geometria para prever uma mudança gradual nas práticas dos estudantes, de um problema prático, em que predomina a Geometria G1, para um problema geométrico, marcado por uma forte presença da Geometria G2. (Mathé & Doz, 2019).

A “distinção entre desenho e figura geométrica é geralmente despercebida nos *Livros Didáticos*, consequentemente, no ensino tradicional” (Henriques, 2001, p. 33). Mas, a utilização do material concreto manipulável (Definição 7) a “mão livre”, tais como os PCOC materializados na impressora 3D, pode servir de incentivo para motivar essa distinção no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Definição 7: O **Material concreto manipulável** é todo instrumento ergonômico e cognitivo, tangível a “mão livre”, capaz de permitir a gestão de conhecimentos, sendo, portanto, útil no processo de ensino e de aprendizagem de objetos de saberes institucionais (Henriques, 2019, p. 33).

A construção do tipo de material, assim definido, pode ocorrer de diversos métodos. Dentre esses métodos, compartilhamos a construção por modelagem paramétrica de objetos geométricos, mobilizando a técnica instrumental crivo-geométrico apresentada na oitava definição no contexto de registros de representação semiótica (Duval, 1993, 1995) e gestão de código para impressora 3D.

Definição 8: O **crivo-geométrico** é uma conservação ou escolha de parte(s) de uma curva ou de uma superfície, necessária(s) na representação do objeto matemático correspondente no registro gráfico (Henriques, Nagamine C, & Serôdio, 2020, p. 258).

Os autores explicam que “um segmento, por exemplo, é parte ou crivo de uma reta, ao passo que os discos e as regiões poligonais, são crivos de superfícies planas”, entre outros crivos. Se uma dada superfície colabora com a modelagem de um sólido, a referida parte ou crivo não se restringe, necessariamente, à fronteira desse sólido (Henriques, 2021a, p. 135). Daí a necessidade de um novo conceito: o de crivo restrito, definido como “a parte de uma superfície que é restrita ao contorno do sólido” (Henriques, 2021a, p. 135). Nas Figuras 4 e 5, apresentam-se duas ilustrações desses conceitos:

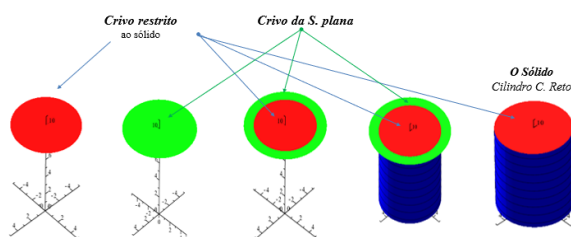


Figura 4.

Ilustração de crivos de uma superfície plana e crivo restrito ao cilindro (Henriques, 2021a, p. 135)

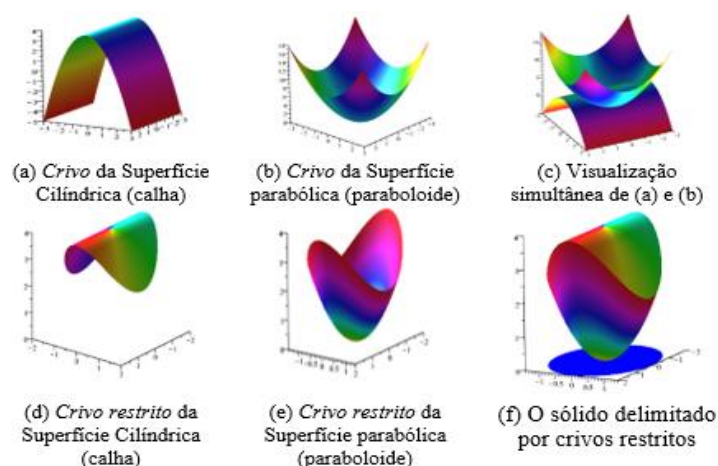


Figura 5.

Ilustração de crivo de superfície cilíndrica, parabolóide e crivos restritos ao sólido (Henriques, 2021a, p. 135).

O conceito de crivo restrito vale, de modo análogo na representação de regiões finitas, mobilizando-se, porém, os crivos de curvas. As regiões poligonais, por exemplo, são delimitadas por crivos restritos de retas. Deve-se entender, portanto, que um PCOC pode ser formado por uma reunião conveniente de partes (crivos restritos) de superfícies, constituindo o contorno do sólido correspondente, enquanto objeto ou figura geométrica finita (cf. Figura 5(f)).

A aplicação da técnica crivo geométrico contribui na produção dos materiais didáticos manipuláveis a “mão livre”, na perspectiva de PCOC, na qual utilizamos a modelagem paramétrica e a técnica de Construção por Sistema de Coordenadas (CSC), definidas a seguir. Vale, antes de tudo sublinhar, para situar o leitor e evitarmos conflitos de pensamentos na perspectiva da Educação Matemática, na qual o termo modelagem se consolida em uma linha ou campo de investigação, que nas pesquisas realizadas na nossa equipe, envolvendo a produção dos referidos materiais, utilizamos a modelagem paramétrica (Definição 9).

Definição 9: A **modelagem paramétrica** é um método de geração e manipulação de objetos geométricos, como curvas e superfícies em ambiente computacional, e se apoia na conexão destes objetos e suas inter-relações mediadas por parâmetros especificados que podem ser alterados automaticamente pelo ambiente ou pelo sujeito em tempo real, sem perda da geometria visada (Henriques, 2021, p. 107).

No contexto dessa modelagem, coexiste uma multiplicidade de possibilidades de manipulação dos referidos objetos geométricos a partir dos objetos algébricos associados, expressos

em diferentes sistemas de coordenadas. Nesse pensamento emerge a aplicabilidade da técnica que apresentamos na seguinte definição, denominada construção por sistema de coordenadas.

Definição 10: A **Construção por Sistema de Coordenadas (CSC)** é uma técnica de representação de curvas e superfícies de equações conhecidas ou gráficos de funções no ambiente computacional a partir da especificação de um sistema de coordenadas bi (2D) ou tridimensional (3D) utilizando comandos correspondentes (nossa definição).

A materialização de um PCOC produzido em um ambiente computacional para a impressora 3D, utilizando as técnicas definidas até então, de modo que seja tangível à mão livre no ensino e na aprendizagem da matemática inerente, passa por uma gestão de um código.

Definição 11: A **gestão de código** de um modelo é o desenvolvimento ou utilização de um processo de conversão do modelo a um arquivo de extensão identificada pela impressora 3D, seja direta ou indiretamente por intermédio de outro ambiente de configuração de modelos que dialoga com essa impressora 3D (Henriques, 2021, p. 117).

Considerando os elementos teóricos apresentados nessa parte do artigo, esperamos que o trabalho subsequente realizado com referências nesses elementos seja plausível para o leitor, em especial o Professor que possa se interessar em produzir materiais didáticos nessa perspectiva e o estudante na aprendizagem matemática. Com efeito, é fundamental situar o ensino, realizando-se, assim, a escolha de uma instituição de referência. Pelo propósito deste artigo, escolhemos, além da instituição, um livro didático e uma figura geométrica referente a um objeto do saber proposto nesse livro. Essas escolhas favorecem as análises e o tratamento matemático necessário na modelagem paramétrica do PCOC associado à referida figura geométrica, mobilizando técnicas do ambiente papel lápis (cf. Definição 3).

Escolha de instituição de referência

Escolhemos os cursos de ciências exatas e tecnológicas como instituição de referência e o livro *Geometria Analítica (GA): Um tratamento vetorial* de Camargo e Boulos (2005) como elemento institucional, no qual destacamos o ensino de quádricas, em especial da hiperbolóide de uma folha elíptico, e curvas de interseções de superfícies como objeto matemático de referência para a modelagem de PCOC. A escolha deste objeto se justifica por entendermos que é um dos objetos matemáticos munido de figuras geométricas que os estudantes que se matriculam em GA e em Cálculo Diferencial e Integral têm dificuldades em construir com as técnicas do ambiente papel lápis, sendo, portanto, o público-alvo dessa produção. Na teoria

apresentada na 3ª edição, página 407 do referido livro, os autores propõem a seguinte definição:

Uma Quádrica Ω é um **Hiperbolóide de uma folha** se existem números reais positivos a , b , c e um sistema ortonormal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação chamada equação reduzida de Ω . (Camargo & Boulos, 2005, p. 407).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{Eq1})$$

A superfície hiperbólica de uma folha (Eq1) intercepta o eixo x e eixo y nos pontos $(\pm a, 0, 0)$ e $(0, \pm b, 0)$ do referido sistema, respectivamente, sendo a , b e c variáveis didáticas que assumem valores ou números reais não nulos. Ao passo que a interseção do hiperbolóide com o eixo z , é um conjunto vazio, uma vez que $z^2 = -c^2$ é insolúvel no conjunto dos números reais. Na página 409, os autores apresentam, no registro gráfico, a interseção de Ω com planos de equação $y=k$, paralelos ao plano xz , nos casos em que $0 < k < b$, $k = 0$ e $k > b$, conforme mostrado na Figura 6. Mas, momento algum ensinam como os crivos das superfícies de hiperbolóide de uma folha elíptico e dos planos apresentados são construídos. A ausência da explicitação ou ensino de técnicas de produção desses crivos pode, também, justificar o porquê das dificuldades de estudantes na aprendizagem dos objetos correspondentes.

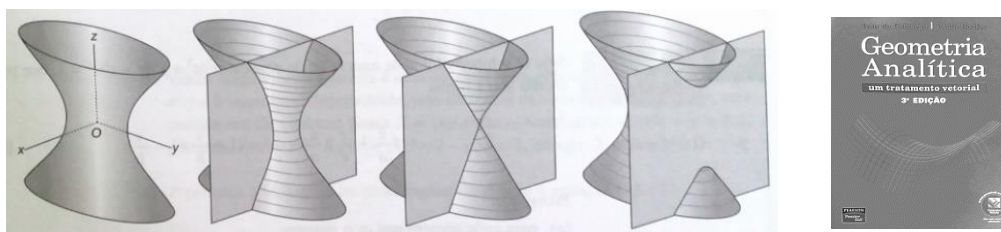


Figura 6

Hiperbolóide de uma folha e planos paralelos ao eixo z (Camargo & Boulos, 2005, p. 409)

Assim, além de responder à questão apresentada anteriormente, o nosso objetivo principal neste artigo é estabelecer uma relação entre uma figura geométrica apresentada em um livro didático e um modelo PCOC correspondente, produzido em um ambiente computacional, materializado na impressora 3D, sendo, portanto, tangível a mão livre, observável em todas as direções possíveis, útil na pesquisa e no ensino. Daí o título deste artigo.

Ora, existem diferentes formas de realizar a modelagem do objeto escolhido. Para utilizarmos as potencialidades das ferramentas apresentadas, mais adiante na Figura 8, e os elementos teóricos considerados na seção anterior, optamos por reescrever a (Eq1) como mostrado na (Eq2), considerando assim o hiperbolóide de uma folha elíptico, cujos traços por planos perpendiculares ao eixo z e as curvas de níveis correspondentes são elipses. Em seguida estabelecemos as declarações de parâmetros úteis na modelagem paramétrica, restringindo o referido hiperbolóide para um modelo

PCOC de métricas específicas.

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}x\right)^2 + \left(\frac{c}{b}y\right)^2 - c^2} \quad (\text{Eq2})$$

Considerando as equações $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ e $z = z$ que permitem estabelecer a relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de um ponto **P** do espaço tridimensional, sendo r e θ as coordenadas polares do ponto **P'** (projeção ortogonal do ponto **P** no plano xy), podemos, a partir de (Eq2) obter uma parametrização da superfície Ω , denotada por $[X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)]$ com $u, v \in \mathbb{R}$, em sintaxes do *Maple*, e representada em Henriques (2021, p. 96) por:

$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

em que $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ indicam as equações paramétricas de uma superfície S . Assim, a superfície Ω admite a parametrização indicada na (Eq3), fazendo $u = z$ e $v = t$:

$$\begin{cases} X(z, t) = \frac{a}{c}\sqrt{z^2 + c^2}\cos(t) \\ Y(z, t) = \frac{b}{c}\sqrt{z^2 + c^2}\sin(t), z \in \mathbb{R}, t \in [0, 2\pi] \\ Z(z, t) = z \end{cases} \quad (\text{Eq3})$$

A partir dessa parametrização alcançada mediante a realização de tratamento algébrico de Eq2 com técnicas de ambiente papel lápis, expressando o raio polar r em função de z , pode-se passar ao trabalho necessário para a implementação do modelo PCOC de Ω no ambiente computacional. Para isso, é necessário o conhecimento das potencialidades das ferramentas do ambiente utilizado, na perspectiva da abordagem instrumental de Rabardel apresentada em Henriques (2021), necessárias na referida implementação.

Potencialidades do ambiente computacional *Maple* para modelagem de um PCOC

Na geração e manipulação de objetos geométricos mencionados na definição de modelagem paramétrica, consideramos nas pesquisas, além do ambiente papel lápis, o ambiente computacional *Maple*. Este é um software para a matemática avançada, que disponibiliza ferramentas para o estudo de diferentes objetos matemáticos reconhecidos em todos os níveis escolares. Esse ambiente foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Universidade Waterloo, Canadá. A sua primeira versão data dos anos 90.

Para produzir um modelo PCOC neste software, é necessário mobilizar algumas ferramentas ou comandos que têm as potencialidades de representação de objetos matemáticos

no registro gráfico. Nessa mobilização, as técnicas apresentadas anteriormente exercem um papel fundamental no processo de construção, em conformidade com as suas exigências no tratamento matemático preliminar, que deve ser realizado pelo sujeito no registro algébrico, em prol da modelagem paramétrica, no contexto definido nesse artigo, visando a aprendizagem matemática. Esse tratamento auxilia a utilização conveniente dos comandos do software.

Vale sublinhar que no *Maple* os comandos são organizados em pacotes que podem ser entendidos como meios de organizar determinadas áreas da matemática no software. Figura 7 apresenta os pacotes que utilizamos durante a modelagem paramétrica e gestão de código de PCOC para impressora 3D, favorecendo a visualização de objetos no registro gráfico a partir de estruturas simbólicas ou instruções implementadas nas linhas de comandos ou *prompt*.

Tabela 1.

Pacotes que contém os comandos de visualização de objetos no registro gráfico (Farias, Funato e Cattai, 2016, p. 8)

1	O pacote denominado “ <i>plots</i> ” acessado segundo a sintaxe <i>with(plots);</i>
2	O pacote denominado “ <i>plottools</i> ” acessado segundo a sintaxe <i>with(plottools);</i>
3	O pacote denominado “ <i>FileTools</i> ” acessado segundo a sintaxe <i>with(FileTools);</i>

Assim, para favorecer um funcionamento efetivo das instruções implementadas no *Maple*, esses pacotes devem ser apresentados corretamente com as suas respectivas sintaxes. Executados mediante a tecla “*Enter*” ou com um clique sobre o ícone !!!, do menu de ferramentas, o *Maple* retorna o conjunto de comandos disponíveis em cada um. A partir daí o sujeito deve desenvolver competências sobre a modelagem desejada, fornecendo ao *Maple* instruções correspondentes a partir do *prompt* via teclado. Na modelagem paramétrica que apresentamos, utilizamos os comandos e as suas respectivas sintaxes mostradas na Figura 8, sem descrevermos as suas potencialidades, por não ser o propósito deste artigo. Todavia, tais descrições podem ser encontradas em Farias, Funato, and Cattai (2016) e em Henriques (2021).

Tabela 2.

Comandos utilizados na modelagem de PCOC e suas respectivas sintaxes (Farias, Funato, & Cattai, 2016, p. 8).

1	<i>plot3d([expreu, exprev, exprew], s=a..b, t=c..d, opts)</i>
2	<i>display(objetos, opts)</i>
3	<i>JoinPath(componentes, opts)</i>
4	<i>exportplot(fname, p, opts)</i>
5	<i>importplot(fname, opts)</i>

As duas primeiras sintaxes colaboram com a modelagem paramétrica, propriamente

dita, ao passo que as três últimas interveem na gestão de código do PCOC modelado, mediante a utilização das duas primeiras sintaxes. Com base nesses conhecimentos, apresentamos a seguir a modelagem almejada.

Modelagem paramétrica do PCOC de Ω (hiperbolóide de uma folha elíptico) seccionado por um plano paralelo ao eixo $_z$

Para proporcionar um acompanhamento melhor da implementação das instruções no *Maple*, organizamos a modelagem e a gestão do código do PCOC de Ω em grupos de execução das instruções. Visando a geração e manipulação de objetos geométricos correspondentes ao PCOC almejado, é necessário, antes decidir sobre as dimensões desejadas para o modelo. Nesta modelagem, fixamos as seguintes medidas para o PCOC de Ω :

- ❖ 12cm de altura.
- ❖ 4cm sobre eixo $_x$ da curva de interseção com o plano de simetria em relação a sua altura.
- ❖ 7cm sobre eixo $_y$ da curva de interseção com o plano de simetria em relação a sua altura.

Por conveniência, escolhemos o plano de simetria sendo o plano $_xy$. Carregamos os pacotes necessários, apresentados na Figura 7, terminado cada instrução com dois pontos para o *Maple* carregar o pacote sem mostrar o referido conjunto de comandos. Em seguida, entramos com as variáveis globais, formando assim o primeiro grupo (GE1).

Primeiro grupo de execução:		(GE1)
Carregamento de pacotes necessários e declarar variáveis globais do modelo		
<i>with(plots): with(plottools), with(FileTools):</i>		
<i>Fator:=10:</i>	# as métricas de objetos geométricos visualizados no <i>Maple</i> são dadas em <i>mm</i> . A variável <i>Fator</i> tem o papel de transformar <i>mm</i> para <i>cm</i> .	
<i>a:=2: b:=3.5: c:=2.7</i>	# valores dos coeficientes ou variáveis didáticas do hiperbolóide para o PCOC de Ω .	
<i>z1:=-6: z2:=-z1:</i>	# equação do plano inferior e do plano superior que delimitam a altura do PCOC de Ω .	
<i>zmin := z1</i>	# valor mínimo assumido por <i>z</i> no PCOC de Ω .	
<i>zmax := z2</i>	# valor máximo assumido por <i>z</i> no PCOC de Ω .	
<i>dr:=0.45:</i>	# incremento de valores.	

Para produzir o PCOC de Ω aplicando as técnicas definidas anteriormente, podemos mobilizar a ideia de sobreposição dos traços deste PCOC que são elipses ao longo do eixo $_z$. Assim, fazendo $x = \frac{a}{c}r\cos(t)$ e $y = \frac{b}{c}r\sin(t)$ e substituindo na equação indicada em Eq2, temos o seguinte resultado:

$$z = \sqrt{r^2 - c^2} \text{ ou } z = -\sqrt{r^2 - c^2} \quad (\text{Eq4})$$

Isolando r em uma dessas equações, implementamos o segundo grupo (GE2) onde definimos, utilizando o comando *unapply* do *Maple*, as funções correspondentes as equações paramétricas apresentadas anteriormente em Eq3, que modelam o PCOC de Ω , considerando as medidas escolhidas, pois, todo modelo a ser impresso em 3D requer a especificação de dimensões a partir do modelo matemático do objeto em estudo. Neste caso, o modelo de Camargo e Boulos (2005, p. 407) apresentado na Eq1.

Vale sublinhar que a impressora 3D que dispomos não imprime superfícies abertas, e sim, fechadas delimitando um espaço tridimensional (sólido). Diferentemente do elipsóide, por exemplo, que é uma superfície fechada delimitando a esfera elíptica que é um sólido, o hiperbolóide de uma folha é uma superfície aberta. Assim, os modelos que produzimos são implementados como casca com espessura dr , obtendo uma superfície fechada. Daí a repetição das equações paramétricas $x = X(u, v)$ e $y = Y(u, v)$, no segundo grupo utilizando o incremento dr em cada repetição.

Segundo grupo de execução:		(GE2)
Definição de funções correspondentes as equações paramétricas do PCOC de Ω		
Instrução implementada	Descrição da instrução	
$Xi(z, t) = unapply\left(\frac{a}{c}\sqrt{z^2 + c^2} \cdot \cos(t), (z, t)\right)$	# Componente X da parametrização do hiperbolóide de uma folha, interna.	
$Yi(z, t) = unapply\left(\frac{b}{c}\sqrt{z^2 + c^2} \cdot \cos(t), (z, t)\right)$	# Componente Y da parametrização do hiperbolóide de uma folha, interna.	
$Xe(z, t) = unapply\left(\frac{a}{c}\left(\sqrt{z^2 + c^2} + dr\right) \cdot \cos(t), (z, t)\right)$	# Componente X da parametrização do hiperbolóide de uma folha, externa.	
$Ye(z, t) = unapply\left(\frac{b}{c}\left(\sqrt{z^2 + c^2} + dr\right) \cdot \cos(t), (z, t)\right)$	# Componente Y da parametrização do hiperbolóide de uma folha, externa.	
$Z(z, t) = unapply(z, (z, t))$	# Componente Z da parametrização do hiperbolóide de uma folha.	

Em seguida implementamos, no terceiro grupo de execução da modelagem, o crivo de Ω (hiperbolóide elíptico de uma folha), doravante também representada por HUFÉ, em forma de casca utilizando essas definições e as variáveis globais. Trata-se, portanto, da geração e manipulação de objetos geométricos, em conexão destes e as suas interrelações mediadas pelos parâmetros ou variáveis previamente declaradas. Para isso, consideramos quatro variáveis locais que estocam os referidos crivos, identificadas por: *HipI* (variável que estoca o crivo interno do HUFÉ), *HipE* (variável que estoca o crivo externo do HUFÉ), *AnelInfer* e *AnelSuper* (variáveis que estocam o anel da tampa inferior e da tampa superior da casca, respectivamente). Com essas escolhas, entramos nas linhas de comandos do *Maple* com as instruções apresentadas em GE3 utilizando a sintaxe `plot3d([X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)], u=umin..umax, v=vmin..vmax, <opções>)` do comando `plot3d` do *Maple* (Henriques, 2021a, p. 95). A sétima instrução apresentada nesse grupo, reúne os resultados estocados nas quatro variáveis em um mesmo sistema de coordenadas, atribuído esse resultado à variável “OmodeloPCOC”.

Terceiro grupo de execução: modelagem da casca cilíndrica de Hiperbolóide de uma folha	(GE3)
<pre> raioMe:= Xi(zmax,a): # raio menor do anel da casca. raioMa:= zmax : # raio maior do anel da casca. HipI:= plot3d(Fator*[Xi(z, t), Yi(z, t), Z(z, t)], z = z1 .. z2, t = alpha .. beta, color = green) HipE:= plot3d(Fator*[Xe(z, t), Ye(z, t), Z(z, t)], z = z1 .. z2, t = alpha .. beta, color = blue) AnelInfer:= plot3d(Fator*[Xe(z, t), Ye(z, t), zmin], z = raioMe .. raioMa, t = alpha .. beta, color = red) AnelSuper:= plot3d(Fator*[Xe(z, t), Ye(z, t), zmax], z = raioMe .. raioMa, t = alpha .. beta, color = black) : OmodeloPCOC:= display(HipI, HipE, AnelInfer, AnelSuper, labels = [x, y, z]) : display(OmodeloPCOC, scaling = constrained) </pre>	

Executando cada instrução com a tecla “Enter”, o *Maple* retorna o resultado esperado que apresentamos na Figura 7.

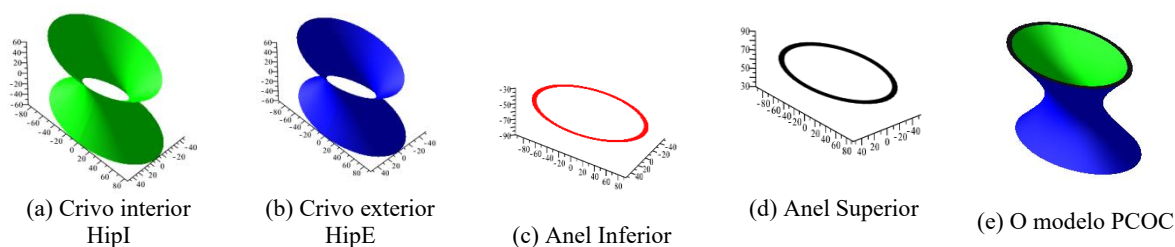


Figura 7.

Visualização do resultado da implementação da casca cilíndrica de Hiperbolóide de uma folha elíptica (Dados da pesquisa)

Deve-se, em seguida, modelar no grupo de execução subsequente (GE4), um crivo de um plano \perp ortogonal ao plano xy . Tratando-se em relacionar esse modelo PCOC com a figura geométrica correspondente no livro (Camargo & Boulos, 2005, p. 409), modelamos o referido plano de forma que seja paralelo ao plano xz , de equação $y = k$. Considerando as opções indicadas pelos autores do livro, escolhemos o caso em que $k > b$. Assim, sabendo-se, pela escolha realizada anteriormente em que $b = 3.5$, podemos considerar qualquer valor maior do que 3.5 e menor do que o raio do maior traço (elipse) do PCOC. Assim, fazendo $k = 6$ fixamos a superfície plana de equação $y = 6$. Vale, contudo, lembrar-se, conforme frisado mais acima, que este plano também deve ser modelado com espessura. Essa exigência conduz a modelagem de um paralelepípedo suficientemente fino de altura igual à do PCOC.

Quarto grupo de execução: modelagem paramétrica de um plano “com espessura (casca)”

(GE4)

```
k:= 6: drk:= 0.2:# incremento para y.
xmax:=2*a: xmin:=- xmax: ymax:=2*a: ymin:=- ymax:
Planomiy:= plot3d(Fator*[u, k, v], u = xmin .. xmax, v = zmin .. zmax, color = yellow):
Planomay:= plot3d(Fator*[u, k+drk, v], u = xmin .. xmax, v = zmin .. zmax, color = red):
Planomix:= plot3d(Fator*[xmin, u, v], u = k .. k+drk, v = zmin .. zmax, color = red):
Planomax:= plot3d(Fator*[xmax, u, v], u = k .. k+drk, v = zmin .. zmax, color = red):
Planomiz:= plot3d(Fator*[u, v, zmin], u = xmin .. xmax, v = k .. k+drk, color = black):
Planomaz:= plot3d(Fator*[u, v, zmax], u = xmin .. xmax, v = k .. k+drk, color = black):
Planokasca:= display(Planomiy, Planomay, Planomix, Planomax, Planomiz, Planomaz, labels = [x, y, z]):
display(Planokasca, scaling = constrained);
```

A execução de cada instrução com a tecla “Enter”, retorna, no *Maple*, o resultado esperado que apresentamos na Figura 8.

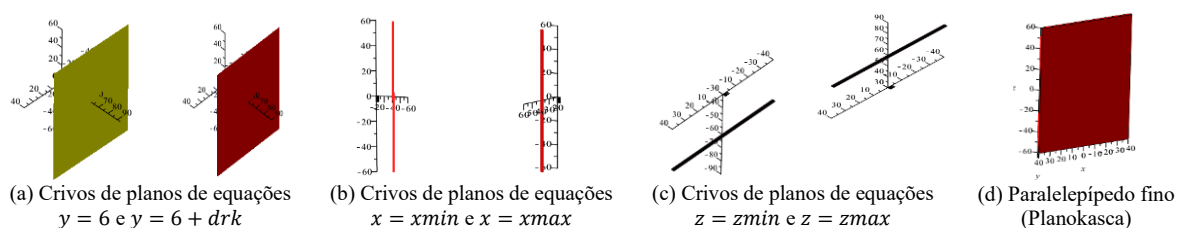


Figura 8.

Visualização do resultado da implementação de uma casca paralelepipedica (Dados da pesquisa)

Conforme já mencionado anteriormente, os dois pontos colocados no final de cada instrução, permitem ocultar o resultado de cada instrução fornecida ao *Maple*, mas que podem ser recuperados sempre que for necessário. Assim, utilizando a ferramenta ou comando *display* pode-se visualizar, conjuntamente, os resultados estocados nas variáveis *Planokasca* e *OmodeloPCOC*, conforme ocorre com a implementação apresentada no quinto grupo de execução.

Quinto grupo de execução: do plano “com espessura (casca)” e da casca do hiperbolóide (GE5)
`display(OmodeloPCOC, Planokasca, scaling = constrained, labels = [x, y, z])`

A execução da instrução apresentada neste grupo com a tecla “Enter”, retorna o resultado apresentado na Figura 9(c), sendo 9(a) e 9(b) os resultados obtidos no GE3 e GE4, respectivamente.

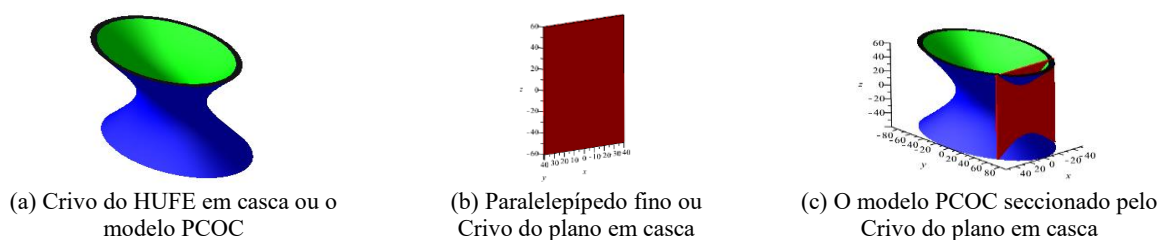


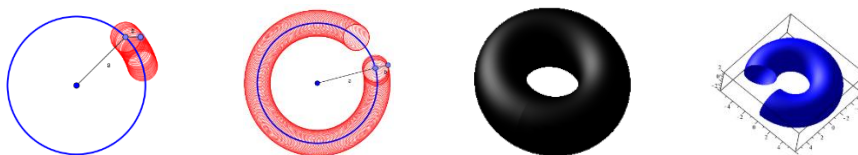
Figura 9.

Visualização do PCOC HUFÉ seccionado por uma casca paralelepipedica (Dados da pesquisa)

É notável, como esperado que a interseção ou equivalentemente um traço da HUFÉ gerado por um plano paralelo ao eixo de revolução elíptica dessa superfície é uma hipérbole contida tanto no HUFÉ quanto no referido plano, como se pode observar na Figura 9(c), em conformidade com a figura apresentada no livro didático de referência deste PCOC.

Além disso, os traços ou intersecções de planos perpendiculares ao referido eixo, são curvas elípticas. A construção, isto é, a modelagem desses traços no ambiente computacional *Maple* visando a impressão 3D, também requer de uma implementação com espessura. Esse ambiente dispõe da ferramenta “*thickness*” que tem a potencialidade de atribuir espessura aos objetos geométricos. No entanto, o resultado que se obtém utilizando essa ferramenta é meramente visual na tela do computador, não é identificado pela impressora 3D, pois o conjunto de pontos que compõem a curva de interseção pertence as superfícies que lhe determina. Para resolver esse problema, utilizamos o conceito de toro. Segundo Henriques (2021, 98),

Em Matemática, o toro é uma superfície que consiste em um espaço topológico homeomorfo ao produto de duas circunferências, contidas em dois planos ortogonais entre si, cada [cf. Figura 10(c) e (d)], e tem a forma de uma câmara de ar de um veículo.



(a) (b) (c) (d)
Figura 10.

Ilustração de um processo geométrico de geração de um toro (Henriques, 2021a, p. 98)

O autor acrescenta ainda que:

No contexto geométrico pode-se, portanto, dizer que um toro, enquanto superfície, no registro gráfico, consiste no lugar geométrico tridimensional formado pela revolução da circunferência menor de raio **b** (*Geratriz*) em torno da circunferência maior de raio **a** (*Diretriz*) (cf. Figura 10 (a) e (b)). No registro algébrico, a superfície de um **toro** é parametrizada com as seguintes equações:

$$\begin{cases} X(u, v) = (a + b \cos(v)) \cos(u) \\ Y(u, v) = (a + b \cos(v)) \sin(u) \\ Z(u, v) = b \sin(v) \end{cases}, \quad u, v \in [0, 2\pi], \text{ sendo } b < a$$

em que **a** é o raio da *circunferência diretriz* do toro e **b** é o raio da *circunferência geratriz* do toro. (Henriques, 2021a, p. 98)

Com base nesse conhecimento, implementamos os traços elípticos do modelo PCOC de Ω , extraindo, a partir da parametrização implementada no GE3, o raio da geratriz e da diretriz de cada toro, favorecendo assim a declaração de variáveis locais apresentada no sexto grupo de execução. Atenção: não confundir as variáveis didáticas **a** e **b** presentes no modelo teórico do toro citado acima com as variáveis didáticas que têm a mesma identidade no modelo Ω .

Declaração de variáveis locais da modelagem paramétrica de toros sobre o PCOC de Ω (GE6)	
Instrução implementada	Descrição da instrução
$re := 0.2$	# Valor do raio da circunf. <i>geratriz</i> do toro no traço elíptico do HUFÉ
$raz0 := \frac{a}{c} \cdot \sqrt{0^2 + c^2} + dr : rbz0 := \frac{b}{c} \cdot \sqrt{0^2 + c^2} + dr :$	# Raio do toro elíptico <i>diretriz</i> , sendo $raz0$ o coeficiente de x e $rbz0$ coeficiente de y na elipse sobre o plano de equação $z=0$
$raz1p5 := \frac{a}{c} \cdot \sqrt{1.5^2 + c^2} + dr : rbz1p5 := \frac{b}{c} \cdot \sqrt{1.5^2 + c^2} + dr :$	# Raio do toro elíptico <i>diretriz</i> , sendo $raz1p5$ o coeficiente de x e $rbz1p5$ coeficiente de y na elipse sobre o plano de equação $z=1.5$
$raz3 := \frac{a}{c} \cdot \sqrt{3^2 + c^2} + dr : rbz3 := \frac{b}{c} \cdot \sqrt{3^2 + c^2} + dr :$	# Raio do toro elíptico <i>diretriz</i> , sendo $raz3$ o coeficiente de x e $rbz3$ o coeficiente de y na elipse sobre o plano de equação $z=3$
$raz4p5 := \frac{a}{c} \cdot \sqrt{4.5^2 + c^2} + dr : rbz4p5 := \frac{b}{c} \cdot \sqrt{4.5^2 + c^2} + dr :$	# Raio do toro elíptico <i>diretriz</i> , sendo $raz4p5$ o coeficiente de x e $rbz4p5$ o coeficiente de y na elipse sobre o plano de equação $z=4.5$
$raz6 := \frac{a}{c} \cdot \sqrt{6^2 + c^2} + dr : rbz6 := \frac{b}{c} \cdot \sqrt{6^2 + c^2} + dr :$	# Raio do toro elíptico <i>diretriz</i> , sendo $raz6$ o coeficiente de x e $rbz6$ o coeficiente de y na elipse sobre o plano de equação $z=6$

Podemos observar, a partir do GE6, que os raios diretrizes dos toros estão relacionados com a parametrização da superfície externa da casca do modelo PCOC de Ω de modo que os traços sejam destacados no PCOC externamente. Considerando a declaração de variáveis apresentada no GE6, implementam-se os respectivos toros no sétimo grupo de execução, representando os traços ou as intersecções em questão expressando relevos no PCOC de Ω .

Modelagem de traços (intersecções de planos ortogonais ao eixo z do hiperbolóide) como toros (GE7)
$Tracoz0 := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz0 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz0 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) + 0], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{red}):$ $Tracoz1p5p := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz1p5 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz1p5 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) + 1.5], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{yellow}):$ $Tracoz1p5n := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz1p5 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz1p5 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) - 1.5], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{yellow}):$ $Tracoz3p := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz3 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz3 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) + 3], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{green}):$ $Tracoz3n := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz3 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz3 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) - 3], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{green}):$ $Tracoz4p5p := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz4p5 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz4p5 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) + 4.5], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{black}):$ $Tracoz4p5n := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz4p5 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz4p5 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) - 4.5], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{black}):$ $Tracoz6p := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz6 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz6 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) + 6], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{red}):$ $Tracoz6n := \text{plot3d}(\text{Fator} * [(raz6 + re * \cos(v)) * \cos(t), (rbz6 + re * \cos(v)) * \sin(t), re * \sin(v) - 6], v = \alpha .. \beta, t = \alpha .. \beta, \text{color} = \text{red}):$ $\text{display}(Tracoz0, Tracoz1p5p, Tracoz1p5n, Tracoz3p, Tracoz3n, Tracoz4p5p, Tracoz4p5n, Tracoz6p, Tracoz6n)$

```
Tracos := display(Tracoz0, Tracoz1p5p, Tracoz1p5n, Tracoz3p, Tracoz3n, Tracoz4p5p, Tracoz4p5n, Tracoz6p, Tracoz6n, OmodeloPCOC)
display(OmodeloPCOC, Planokasca, Tracos, scaling = constrained, labels = [x, y, z])
```

A execução dessas instruções fornecidas ao *Maple* nessa modelagem paramétrica, retorna os resultados apresentados na Figura 11, sendo a Figura 11(b) obtida por manipulação direta da Figura 11(a) com mouse, projetando-se assim esta Figura 11(a) no plano xy .

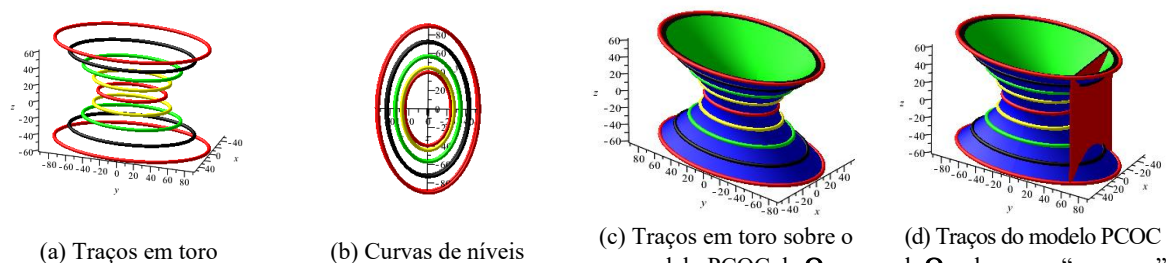


Figura 11.

Visualização dos traços do PCOC de Ω e as curvas de níveis referentes aos traços no plano xy
(Dados da pesquisa)

Com esse resultado, conclui-se a modelagem paramétrica do PCOC de Ω , e seguimos a produção com a gestão do código desse modelo visando a sua impressão em 3D, implementando-se assim, o oitavo grupo de execução que deve conter os seguintes dados:

- ❖ A última instrução apresentada no GE7 atribuída a uma variável;
- ❖ Um caminho gerenciado pelo comando *JoinPath* do pacote *FileTools* apresentado na Figura 7;
- ❖ Uma instrução do comando *exportplot* que reconhece o caminho para exportar o código do modelo PCOC do hiperbolóide de uma folha elíptico (HUFE) em *stl* à uma pasta de documentos na plataforma que está sendo utilizada (*Linux*, *Macintosh*, *Windows* etc.)
- ❖ Uma instrução do comando *importplot* que resgata o modelo em *stl* para ser visualizado no próprio ambiente computacional de produção do modelo PCOC (Opcional).

Na modelagem paramétrica do PCOC de Ω (o HUFE) desenvolvida neste artigo utilizamos a plataforma Windows. Portanto, definimos uma pasta no Windows que serve de espaço de armazenamento do código do modelo em *stl*. Tal pasta, não é, necessariamente, a mesma que contém o arquivo *Maple* da modelagem implementada em grupos de execução. Assim, o oitavo grupo de execução foi elaborado as seguintes instruções:

Gestão do código do hiperbolóide de uma folha elíptico	(GE8)
<pre>HiperbUmaFolha := display(OmodeloPCOC, Planokasca, Tracos, scaling = constrained, labels = [x, y, z]); Caminhostl := FileTools:-JoinPath(["C:", "ModelosMaple", "HiperboloideUmaFolha.stl"], platform = "windows"); exportplot(Caminhostl, HiperbUmaFolha); importplot(Caminhostl);</pre>	

Executando essas instruções com a tecla “Enter”, o *Maple* retorna o resultado apresentado na Figura 12(c). É importante sublinharmos que essa gestão é válida na criação de códigos *stl* de qualquer modelo de PCOC implementado no *Maple*, adequando as variáveis utilizadas.

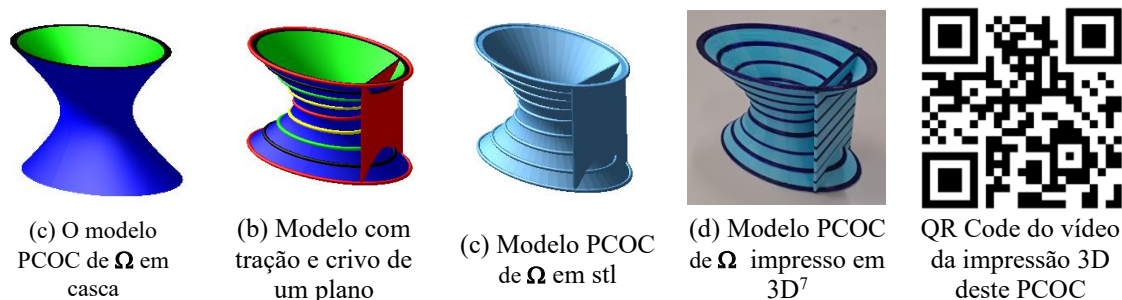


Figura 12:




Visualização modelo PCOC de Ω (hiperboloide de uma folha elíptico) na versão Maple, em stl e a versão impressa em 3D, sendo acessível a mão livre

Apresenta-se na Figura 12(d) o resultado da impressão 3D esperado. Assim, o essencial nesse artigo é compartilhar com a comunidade acadêmica e científica a nossa contribuição no que diz respeito as possibilidades de produção de modelos ou materiais didáticos impressos em 3D, evidenciando as suas potencialidades e relações com as figuras geométricas disponíveis em livros didáticos, favorecendo os seus manuseios a “mão livre”. Desta forma, esperamos ter participado de forma efetiva nos interesses institucionais sobre a elaboração de materiais didáticos que possam ser materializados na impressora 3D para fins educativos tanto no ensino em salas de aula de Matemática quanto na pesquisa e (ou) na extensão universitária.

Nessa perspectiva, o modelo impresso pode ser explorado de diversas maneiras. Nas pesquisas realizadas no GPENMAC, para cada modelo que compõe o acervo do L@VIM, incluído este, é elaborado um dispositivo experimental, organizado com, ao menos, um Gerador de Tarefas (GT) (Henriques & Almouloud, 2022, p. 379), gerenciando uma quantidade significativa de tarefas a partir do modelo impresso em 3D. Cada dispositivo compõe uma Sequência Didática (SD) no âmbito da engenharia didática de Artigue (1988), proposta aos estudantes. Apresenta-se na Tabela 3 o dispositivo organizado com base no PCOC de Ω .

Tabela 3.

Dispositivo experimental em torno do modelo PCOC de Ω impresso em 3D (Dados da pesquisa)

 	<p>UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ (UESC) DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS (DCEX) Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM)</p>	
DISPOSITIVO EXPERIMENTAL		
Dispositivo experimental para análise de práticas efetivas de estudantes sobre estudo de Geometrias, Plana, Analítica e Espacial GEOPAES utilizando os modelos PCOC ⁸ no Ensino Superior.		
Professor da turma (opcional):		Data:
Nome do estudante (opcional):		Curso:

⁷ <https://youtu.be/Q4kSRr1BPWU> (link do vídeo de impressão deste PCOC) e do [código stl para download](#).

⁸ Projeto de Construção de Objetos Concreto (PCOC).

Sessão Unitária da SD	
Gerador de Tarefas (GT ₁)	
Observar cuidadosamente o modelo PCOC que está em suas mãos, obtido por materialização na impressora 3D. Utilizar se necessário, um instrumento de medida apropriado para realizar cada tarefa (t_n) do GT ₁ , com $n = 1, 2, \dots, 12$, explicando cada etapa de realização na língua materna ou natural.	
t_1	Representar, o modelo PCOC que está em suas mãos, em sistema de coordenadas tridimensional, na folha de respostas, com uma escala qualquer, respeitando, as medidas dos elementos do modelo.
t_2	Fornecer o nome atribuído, em Geometria Analítica, ao modelo PCOC que acabou de representar na folha de resposta.
t_3	Passar as suas mãos, suavemente, ao modelo sentindo as curvas em revelô no seu contorno, e forneça o nome atribuído, em Cálculo Diferencial e Integral, à essas curvas.
t_4	Descrever no registro da língua materna, como são obtidas as curvas nomeadas na realização da t_3 .
t_5	Fornecer o nome atribuído a essas curvas projetadas ortogonalmente no plano de apoio do modelo.
t_6	Representar, no registro algébrico e no registro gráfico as curvas nomeadas na realização da t_5 .
t_7	Fornecer a medida do eixo menor e do eixo maior da menor curva e da maior curva com revelô notável neste PCOC.
t_8	Fornecer a equação geral, no registro algébrico, do modelo matemático associado a este PCOC.
t_9	Fornecer a equação específica deste PCOC que está nas suas mãos observando o resultado obtido na realização da t_1 .
t_{10}	Descrever a curva gerada pela intersecção do crivo do plano (CP) modelado com espessura com o PCOC.
t_{11}	Comparar o resultado obtido na realização da t_1 , e indique o plano coordenado com que o CP descrito na t_9 é paralelo.
t_{12}	Representar a curva descrita na realização da t_{10} , no registro algébrico.

Cada tarefa do GT₁ passa, em seguida, por uma análise a priori na perspectiva de uma SD, revelando o objetivo, análise matemática e didática, as variáveis didáticas, os pré-requisitos e competências, e os resultados esperados para cada tarefa. Uma vez concluída a análise a priori, esse dispositivo deve entrar nas etapas de aplicação, análise a posteriori e a validação de uma SD, que não estão incluídas neste artigo, sendo indicadas para trabalhos futuros. Destacamos que as doze tarefas gerenciadas no GT₁ não esgotam a gestão de tarefas deste PCOC que possam ser trabalhadas com os estudantes no ambiente papel_lápis em diferentes instituições. Além disso, podem-se criar outros geradores de tarefas com este PCOC em mãos, visando a sua modelagem pelos estudantes utilizando o ambiente computacional *Maple* ou outros ambientes, a citar, por exemplo, o software *GeoGebra*, e a gestão do código correspondente para a impressora 3D neste software.

Para que a tecnologia da impressora 3D seja, de fato, útil na Educação, é fundamental sublinharmos que a sua utilização não é tão complexa como se possa imaginar, pois ela atua por analogia com a prática usual de impressão 2D em papel ofício, onde o usuário deve, inicialmente, ter um documento previamente elaborado por alguém ou pelo próprio usuário. Logo, a modelagem paramétrica e a gestão de códigos para a impressão 3D são práticas necessárias na Educação Matemática, pois, além de favorecerem o acesso de objetos a “mão livre”, podem contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas inerentes por estudantes, tais como: analisar cada instrução implementada no ambiente computacional e extrair as representações algébricas correspondentes; analisar o modelo impresso e identificar

conceitos ou objetos matemáticos inerentes; analisar as intersecções (traços), as curvas de níveis e identificar as representações algébricas correspondentes, como proposto no dispositivo experimental apresentado na Tabela 3.

Dessa forma, esperamos que a ideia de figura geométrica no livro e o PCOC a “mão livre” seja uma prática útil na reflexão e desenvolvimento de competências de estudantes relativamente a aprendizagem matemática.

Antes de apresentarmos as considerações finais deste artigo, achamos por bem da Educação Matemática e da difusão de conhecimentos, trazermos uma breve discussão pedagógica da nossa experiência com os PCOC no GPEMAC⁹.

Experiências anteriores com a produção e utilização de PCOC

Os PCOC nasceram no GPEMAC a partir dos projetos de ensino, pesquisa e extensão desenvolvidos no grupo com suporte físico e tecnológico do Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC (vide L@VIM no [endereço do grupo](#)). Além de agregar as atividades de iniciação científica e de conclusão de cursos, os PCOC veem sendo investigados e integrados em pesquisas de pós-graduação, a citar as dissertações de mestrado: “Prototipagem Rápida de PCOC na Impressora 3D para o Ensino e Aprendizagem de Integrais Duplas e Triplas” de Marques (2016); “Aplicação de Modelos de PCOC na Aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio” de Ramos (2018); “O Estudo de Superfícies Regradas Mediado por Modelos De PCOC no Ensino Superior” de Sousa (2021). Os dispositivos experimentais que constituem as sequências didáticas de cada pesquisa utilizados como instrumentos investigativos com estudantes revelam o potencial pedagógico de cada PCOC e o pacto formativo que são notáveis nas práticas efetivas dos estudantes que utilizam os PCOC. Além disso, os PCOC compõem o acervo do L@VIM. Este tem recebido diversas visitas de estudantes e de Professores de diversas escolas da Educação Básica da região de influência da UESC, assim como dos Professores e estudantes da própria Universidade, levando novas experiências no ensino e aprendizagem em aulas. Portanto, esperamos que essas ações, entre outras que poderíamos detalhar aqui, como as exposições em eventos locais e nacionais e os resultados produzidos nas nossas pesquisas, sejam úteis e praticadas nas outras instituições e grupos de pesquisas, contribuindo para o fortalecimento do debate sobre a integração de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da matemática em todos os níveis.

Considerações finais

⁹ Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional. www.gpemac.com.br

O trabalho apresentado aqui é uma prática frequente nas pesquisas que vimos desenvolvendo, e que têm alimentado o acervo do Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC. Com efeito, permite responder o questionamento que nos colocamos no início: Como auxiliar o Professor no ensino e o estudante na aprendizagem de saberes de GEOPAES, favorecendo a visualização e a interpretação de figuras geométricas apresentadas em livros didáticos na instituição de ensino onde esse livro é utilizado? Pois, os PCOC enquanto materiais didáticos acessíveis à mão livre podem, de fato, auxiliar o trabalho do Professor no ensino e dos estudantes na aprendizagem da matemática, principalmente nos cursos de GEOPAES em todas as instituições de ensino, e de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior.

Afirmamos, portanto, que um PCOC impresso em 3D pode contribuir na identificação ou reconhecimento dos elementos ou objetos geométricos notáveis no próprio modelo, na manipulação e no seu posicionamento em relação ao sistema de coordenadas cartesianas ortogonal, na identificação da melhor orientação dos eixos coordenados, na aplicação do procedimento “tomográfico” examinando, por conseguinte, as intersecções de crivos de superfícies que o delimitam com os planos paralelos aos planos coordenados, favorecendo assim a análise de traços e de curvas de níveis, entre outros procedimentos ou estratégias que podem ser utilizados pelo Professor e pelos estudantes.

Por exemplo, a ideia intuitiva de curvas tratadas usualmente no espaço bidimensional é uma noção que normalmente os estudantes visualizam e aprendem com mais facilidade; porém, tratar uma curva como sendo o resultado da intersecção de duas superfícies, como ocorre com um hiperbolóide de uma folha elíptico e um plano, conduz o estudante a relacionar a ideia intuitiva que ele já possui com as novas informações que essa intersecção impõe em três dimensões, enquanto saber ensinado (nível 3) da transposição didática. Nesse momento, o conhecimento ou saber aprendido (nível 4), pode ser concretizado com a manipulação do hiperboloide de uma folha elíptico como PCOC impresso em 3D. Apenas ler ou falar que “ao examinar as intersecções de um hiperbolóide de uma folha elíptico com planos paralelos aos planos coordenados podemos ver que um hiperbolóide de uma folha é a reunião de hipérboles e retas, ou reunião de elipses ou ainda reunião de circunferências” não tem a mesma acessibilidade para o estudante no nível 4 da transposição didática do que se o Professor realizar a mesma análise nesse processo utilizando o PCOC impresso em 3D manipulável a mão livre.

Essas ações comprovam, portanto, que ter um modelo PCOC em mãos estabelece uma diferença significativa no processo de aquisição de conhecimento baseado na consideração ou observação do desenho da figura geométrica correspondente, apresentado no livro didático que, em muitos casos, aparece como algo dado, sem que sejam explicadas as técnicas utilizadas para

obtê-lo, quando o autor do livro escreve: “a figura ao lado mostra”.

Assim, o nosso leitor interessado nas soluções apontadas neste artigo pode ajudar na difusão das possibilidades de produção e aquisição de conhecimentos visados nas diferentes instituições de ensino. Pois apesar da utilização de impressoras 3D na Educação ser ainda uma novidade, produzir os materiais didáticos e gestão de códigos para a impressão em 3D e poder analisar aquele desenho da figura geométrica correspondente apresentado no livro didático ou produzido pelo professor no quadro é uma ajuda sustentável no desenvolvimento de competências, na aquisição e consolidação de conhecimentos matemáticos.

Vale ainda mencionarmos que no processo de produção ou modelagem de um PCOC é possível vermos as interrelações entre os saberes matemáticos inerentes nos diferentes registros de representação, a citar os saberes do hiperbolóide hiperbólico expressos na sua equação geral no registro algébrico, na sua descrição como objeto matemático na língua materna, a representação de seus crivos no registro gráfico, a identificação e representação se seus traços que são elipses e as curvas de níveis correspondentes, no registro algébrico, gráfico e na língua materna, bem como a transposição desses saberes em ambiente computacional.

Com efeito, a Álgebra e a Geometria enquanto domínios de saberes básicos em Matemática estão sempre presentes. Essa menção faz-nos lembrar da fala ou questionamento de uma estudante do Ensino Médio em visitas organizadas pelo GPEMAC no L@VIM. Após ter realizado as atividades propostas durante uma dessas visitas utilizando os PCOC do acervo do L@VIM, afirmou, surpresa com as suas próprias palavras: “Ah! Então podemos misturar a Geometria Espacial com a Geometria Analítica?”, o que revela que muitas ações precisam ser feitas para mudarmos a realidade escolar.

Referências

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique de Mathématiques. França, v. 9, no 3, p. 245-308.
- Bridoux, S., Nihoul, C. (2015). *Difficultés des élèves à interpréter des constructions dans l'espace*. Une étude de cas. Petit x, nº 98.
- Brousseau G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. La Pensée sauvage, éditions, BP 141, F38100 Grenoble. ISBN 2 85919 134 8. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield.
- Camargo, I.; Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica, um tratamento vetorial* 3a ed. Pearson.
- Chevallard (Yves). (1985). *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*/ Yves Chevallard. Grenoble : La Pensée Sauvage, 126 p. 22 NOTES CRITIQUES cm. (Recherches en didactique des mathématiques).
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par

- une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, V. 12, n°1, p. 73-112.
- Duval R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65.
- Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.
- Duval, R. (2012). Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez.
- Farias, E. S; Funato, R. L; Cattai, A. P. (2016). Análise de elementos institucionais visando a prototipagem rápida na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. *ILADIMA*.
- Henriques, Afonso; Farias, Elisângela Silva; Funato, Rosane Leite. (2024). A geometria analítica como aliada importante na aprendizagem em cálculo diferencial e integral: o caso de integrais múltiplas nos cursos de engenharias. *Revista Ensino em Debate*, Fortaleza, v. 2, p. e2024005. <https://sites.google.com/site/gpemac/dissertacoes-de-mestrado>.
- Henriques, A. & Almouloud, S. A., (2022). O modelo praxeológico de gestão de tarefas imerso em um percurso de estudo e pesquisa em face de aprendizagem de Superfícies Quádricas no ensino superior envolvendo ambiente computacional. p. 361. In. *Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: fundamentos teórico-metodológicos para a formação – volume 2 / Sado Ag Almouloud, Renato Borges Guerra, Luiz Marcio Santos Farias, Afonso Henriques, Jose Messildo Viana Nunes (org.) Curitiba: CVR, 2022.*
- Henriques, A. (2021a). *Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D*. Ilhéus, BA: Editus, 247 p.
- Henriques, A. (2021b). Abordagem Instrumental e aplicações. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.23. p. 247-280.
- Henriques, A. (2019). *Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias*. Via Litterarum. Ibicaraí, Bahia. Editora.
- Henriques, A., Nagamine, A., Serôdio, R. (2020). Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.22, n. 1, 253-275.
- Henriques, A.; Nagamine, A.; Nagamine, C. M. L. (2012). Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez.
- Henriques, A. (2001). *Dinâmica dos Elementos da Geometria Plana em Ambiente Computacional Cabri-Géomètre II*, Editus.
- Marques, S. A. S. S. (2016) *Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas*. [Dissertação de mestrado Acadêmico em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)]: https://drive.google.com/file/d/1gxEzEhv_vCXezYXbYQGznAs39HHAFb6V/view.
- Mathé. Anne-Cécile, Doze, Joris Mithalal-Le. L’usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l’enseignement. *La Pensée Sauvage*. Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, 1, 2019. hal-03473356

- Palles, C. M.; Silva, M. J. F. (2012). Visualização em Geometria Dinâmica. *Anais do Encontro de Produção Discente*, PUC/SP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. P. 1-9.
- Parzysz, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Dans des Environnements papier – Crayon et Informatique. Extraído do Atas do 29º **Colóquio Inter-IREM des Formateurs et Professeurs charges de la Formation des maîtres**. Tours, 2002, p. 85 - 92. Ed. Université de Montpellier.
- Ramos, M. S. (2018) *Aplicação de Modelos de PCOC na Aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio*. [Dissertação de mestrado Acadêmico em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)].
<https://www.biblioteca.uesc.br/pergamumweb/vinculos/201611811D.pdf>.
- Salazar, J. V. F.; Vita, A. C.; Almeida, T. C. S. (2008). Visualização em Geometria Espacial: Uma abordagem usando Cabri 3D. *2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT*. 28 de julho a 1 de agosto.
- O Estudo de Superfícies Regradas Mediado por Modelos De PCOC no Ensino Superior” de Sousa (2021). [Dissertação de mestrado Acadêmico em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)]: https://drive.google.com/file/d/18RL6C_gle-Xo3H4dew59Tm_2VGbYe3XI/view