História da Ciência e Ensino
Construindo interfaces

http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2025v31p2-23

Um recorte do livro "As Ideias Fundamentais da Matemática" em relação ao tema ordem e continuidade: análise comparativa do capítulo IX e seus manuscritos

Rodrigo Rafael Gomes

Resumo

Este trabalho apresenta um recorte de "As Ideias Fundamentais da Matemática" (1929), livro de divulgação científica produzido pelo matemático, engenheiro e astrônomo brasileiro Manuel Amoroso Costa (1885-1928). O foco são os conceitos de ordem e continuidade, temas expostos por Amoroso Costa, à luz da teoria dos conjuntos, no capítulo IX. O exame comparativo desse texto e seus manuscritos mostra influência predominante do matemático Edward V. Huntington (1874-1952), embora haja evidências de contribuições dadas por outros autores. Ressalta-se aqui a importância dos estudos históricos voltados para a análise dos manuscritos dos cientistas, enquanto testemunhas do embate experimentado por eles enquanto escrevem (e refletem) sobre os temas que pretendem divulgar.

Palavras-chave*: história da matemática no Brasil, manuscritos de cientistas, teoria dos conjuntos, axiomas de ordem, densidade.*

Abstract

This paper presents an excerpt from "The Fundamental Ideas of Mathematics" (1929), a popular science book produced by the Brazilian mathematician, engineer and astronomer Manuel Amoroso Costa (1885-1928). The focus is on the concepts of order and continuity, themes presented by Amoroso Costa in chapter IX, in light of set theory. A comparative examination of this text and his manuscripts shows the predominant influence of mathematician Edward V. Huntington (1874-1952), although there is evidence of contributions made by other authors. The importance of historical studies focused on the analysis of scientists' manuscripts is highlighted here, as the manuscripts bear witness to the struggle experienced by the authors while writing (and reflecting) on the themes they intend to disseminate.

Keywords*: history of mathematics in Brazil, scientists' manuscripts, set theory, axioms of order, density.*

INTRODUÇÃO

Este artigo dá continuidade a um trabalho[1] no qual abordei o capítulo VII de *As Ideias Fundamentais da Matemática* (1929), obra do matemático e engenheiro brasileiro Manuel Amoroso Costa (1885-1928). No capítulo aludido, Amoroso Costa expõe os conceitos iniciais da teoria dos conjuntos, tema que, conforme expus no outro trabalho, é retomado por ele em capítulos posteriores.

Aqui, farei uma análise da exposição de Amoroso Costa sobre a noção de conjunto linearmente ordenado, assunto do capítulo *IX – As noções de ordem e de continuidade*, do mesmo livro. Diferindo um pouco da metodologia que adotei no trabalho anterior, primeiro farei uma apresentação do capítulo tal como este se apresenta na versão publicada, tentando dar ao leitor uma ideia geral de seu conteúdo, depois

[1] Rodrigo Rafael Gomes, "Conjunto, correspondência, número cardinal e muito mais: o capítulo VII do livro 'As Ideias Fundamentais da Matemática' em comparação com seus manuscritos", *História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces* 29, nº 1 (2024): 83-100, https://doi.org/10.23925/2178-2911.2024v29p83-100.

focarei nos manuscritos[2] do texto, aqui referidos, segundo a ordem em que foram compostos, como rascunhos 1 e 2. Essa escolha se deve à extensão do capítulo ora analisado, comparativamente maior do que a do capítulo VII.

AXIOMAS DE ORDEM

O capítulo IX está organizado segundo oito seções, começando pela 43 e indo até a seção 50.[3] Na primeira delas, *A ordem linear*, Amoroso Costa apresenta a definição de conjunto ordenado linearmente, como sendo o conjunto K entre cujos elementos há uma relação $\prec$ caracterizada pelos seguintes axiomas:

O1. Se a é distinto de b, então ou $a \prec b$ ou $b \prec a$;

O2. Se $a \prec b$, então a é distinto de b;

O3. Se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$.

Em seguida, Amoroso Costa argumenta, oferecendo interpretações para K e $\prec$, que esses axiomas são consistentes ("compatíveis", ele diz) e independentes e que o sistema por eles formado é não-categórico. Convém ressaltar que uma discussão sobre essas noções (consistência, independência e categoricidade) é feita previamente no capítulo III.

A não-categoricidade do sistema axiomático anterior, assinala Amoroso Costa, implica a existência de mais de um tipo de ordem linear, noção para a qual ele fornece a definição seguinte:

> Sejam duas sequências K e K'. Diz-se que ambas pertencem ao *mesmo tipo de ordem*, quando entre elas se pode estabelecer uma correspondência perfeita e tal que a ordem de elementos quaisquer de K seja a mesma dos elementos correspondentes em K'.
>
> É preciso observar que *um mesmo conjunto pode ser ordenado de maneiras diferentes*, e que, portanto, a comparação entre dois conjuntos supõe já feita essa ordenação.[4]

O termo "sequência", na passagem acima, é usado com o mesmo significado que *conjunto ordenado linearmente*. Por "correspondência perfeita" nosso autor quer dizer, naturalmente, uma bijeção entre os conjuntos ordenados K e K'.[5]

---

[2] Amoroso Costa produziu dois rascunhos para o livro, cujos manuscritos se encontram organizados em dois dossiês no Arquivo de História da Ciência do Museu de Astronomia e Ciências Afins (MAST), no Rio de Janeiro. Tal como no outro trabalho, me baseio na versão digital dos documentos, disponível para acesso no site do MAST (http://zenith.mast.br).

[3] O livro contém ao todo 97 seções.

[4] Manuel A. Costa. *As Idéas Fundamentaes da Mathematica* (Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929), 111, grifos meus.

[5] Conforme é argumentado em Gomes, 87, a expressão "correspondência perfeita" provavelmente tem origem na francesa "correspondance parfaite", utilizada ao longo da *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, obra consultada por Amoroso Costa em seu trabalho de pesquisa para o próprio livro.

Esse fragmento contém a primeira menção de que entre os elementos de um conjunto pode-se estabelecer mais do que uma relação de ordem, não necessariamente do mesmo tipo, e um exemplo disso é apresentado na seção 46. Convém notar que as seções 44 e 45 configuram uma espécie de digressão em relação à discussão principal do restante do capítulo, cujo propósito é, nas palavras do próprio autor, analisar "os mais importantes tipos da ordem linear".[6] Por essa razão, as duas seções podem ser ignoradas no momento, sem prejuízo de entendimento do conteúdo, sendo que a elas retornarei mais à frente.

O exemplo discutido na seção 46 versa sobre o conjunto F dos pares (i,j) de números inteiros positivos. Amoroso Costa argumenta que se pode estabelecer um primeiro tipo de ordem $\prec_1$ entre os elementos desse conjunto definindo $(i,j) \prec_1 (m,n)$ quando $i < m$ e, se $i = m, j < n$. Em seus próprios termos:

> Para mostrar como um mesmo conjunto pode ser ordenado linearmente segundo tipos essencialmente diferentes, tomemos o conjunto dos pares (i,j) de números inteiros positivos, e disponhamos os seus elementos em um quadro de dupla entrada:
>
> | | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ | .... |
> |---|---|---|---|---|
> | $i=1$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,3)$ | .... |
> | $i=2$ | $(2,1)$ | $(2,2)$ | $(2,3)$ | .... |
> | $i=3$ | $(3,1)$ | $(3,2)$ | $(3,3)$ | .... |
> | .... | .... | .... | .... | .... |
>
> Um primeiro tipo se obterá tomando os elementos da primeira linha (na ordem dos j crescentes), em seguida os da segunda linha, e assim por diante.[7]

Um segundo tipo de ordem $\prec_2$, prossegue, se pode definir entre os elementos do mesmo conjunto assumindo que $(i,j) \prec_2 (m,n)$ quando $i > m$, se $i + j < m + n$, e $j < n$, se $i + j = m + n$: "Procurando um segundo modo de disposição tomemos sucessivamente os grupos de pares em que se tem $i + j = 2, 3, 4$, etc. e formemos a sequência: $(1,1)$ $(2,1)$ $(1,2)$ $(3,1)$ $(2,2)$ $(1,3)$ ....".[8]

Enquanto a ordem $\prec_2$ é "a mesma da sequência natural dos números inteiros positivos" diz, na ordem $\prec_1$ cada elemento tem um sucessor imediato, "mas há uma infinidade de elementos (aqueles para os quais $j = 1$) que não têm predecessor imediato".[9] As noções de *estar entre* dois elementos, de *sucessor* e *predecessor imediatos* e de *primeiro* e *último elementos* de um conjunto ordenado são definidas no início da seção, antes da discussão dos exemplos acima. O texto não explicita a razão das ordens $\prec_1$ e $\prec_2$ serem

[6] Tal análise, observa Amoroso Costa no início da seção 46, é devida sobretudo a Georg Cantor (1845-1918).
[7] Costa, 114.
[8] Ibid., 114.
[9] Ibid., 114.

consideradas de tipos diferentes, ficando subentendido que a segunda possui uma propriedade que a primeira não tem, a saber, o fato de cada elemento do conjunto (ordenado segundo $\prec_2$) possuir um predecessor imediato.

Na seção seguinte, Amoroso Costa aborda os conjuntos enumeráveis, que são, segundo ele, os equivalentes ao dos números cardinais finitos.[10] Embora a relação de equivalência de conjuntos signifique apenas uma bijeção entre os dois conjuntos – o que independe das relações de ordem particulares que se considerem definidas sobre cada um deles –, Amoroso Costa julgou conveniente fazer essa exposição no contexto da discussão sobre conjuntos ordenados porque "os elementos de um conjunto enumerável podem ser afetados de índices $1, 2, 3, \ldots$ e dispostos segundo uma sequência superiormente ilimitada",[11] diz. Assim, ele parece querer enfatizar que sobre todo conjunto enumerável se pode definir uma ordem do mesmo tipo da ordem natural dos inteiros positivos.

Nessa seção, Amoroso Costa ainda menciona exemplos de conjuntos que são enumeráveis, entre eles o dos números racionais (que ele identifica com o subconjunto de F formado pelos pares (i, j) tais que i e j são primos entre si), o dos números algébricos (resultado ao qual ele faz alusão a Cantor) e a reunião de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis.

Os temas das seções 48 a 50 são os conceitos de ordem discreta, densa e contínua, respectivamente. Um conjunto ordenado discreto, conforme expõe Amoroso Costa, é o conjunto ordenado linearmente que satisfaz três axiomas:

> D1. (postulado de Dedekind): Se K_1 e K_2 são dois conjuntos contidos em K, tais que cada elemento de K pertença a K_1 ou a K_2, e que todos os elementos de K_1 precedam todos os de K_2, então existe em K um elemento X tal que: 1) todo o elemento que precede X pertence a K_1; 2) todo o elemento que se segue a X pertence a K_2;
> D2. Todo o elemento de K, a exceção do último, tem sucessor imediato;
> D3. Todo o elemento de K, a exceção do primeiro, tem predecessor imediato.[12]

Seguindo uma nomenclatura que ele credita a Cantor, Amoroso Costa informa que os conjuntos ordenados discretos (ou sequências discretas, na sua terminologia) que possuem primeiro elemento, mas não último, são denominados *progressões*, constituindo o tipo ordinal ω, enquanto os que possuem último elemento, mas não primeiro, são chamados de *regressões* e possuem tipo ordinal $^*\omega$.

[10] O conceito de número cardinal – ou cardeal, segundo a terminologia utilizada por Amoroso Costa – é introduzido no capítulo VII. Para detalhes, ver Gomes.
[11] Costa, 115.
[12] Ibid., 116.

Assim como em relação aos axiomas O1-O3, a independência do sistema D1-D3 é apresentada através de três interpretações para K e $\prec$, interpretações essas que são fornecidas pelo matemático estadunidense Edward V. Huntington (1874-1952) no livro *The Continuum and Other Types of Serial Order* (1921),[13] conforme Amoroso Costa informa em uma nota de rodapé.

Em seguida, Amoroso Costa apresenta a propriedade que, segundo ele, é a mais importante das sequências discretas, que se denomina, entre os números inteiros positivos, *princípio da recorrência*. Aquela propriedade – que se pode exprimir "dizendo que o conjunto dos elementos situados entre dois elementos quaisquer de uma sequência discreta é finito"[14] – explica ele, aparece em seu livro como um teorema, uma vez que é uma consequência dos axiomas de ordem discreta:

> Se a e b são dois elementos quaisquer de uma sequência discreta, com $a \prec b$; e se s_1 é o sucessor imediato de a, s_2 o de s_1, s_3 o de s_2, e assim por diante, então o elemento b é um dos s; e também, se t_1 é o predecessor imediato de b, t_2 o de t_1, t_3 o de t_2, e assim por diante, então o elemento a é um dos t.[15]

A propriedade da existência de uma infinidade de elementos entre dois elementos quaisquer de um conjunto ordenado K, assinala Amoroso Costa, é um consectário da *propriedade da densidade* (designada Δ por ele), que é quando há um elemento de K entre dois elementos a e b quaisquer desse conjunto. É o caso, diz, dos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais, segundo a ordem habitual.

Interessante notar que a partir da seção 49 Amoroso Costa troca a palavra "sequência" por "conjunto" nos títulos das seções, usando a última com mais frequência ao longo do texto. Assim, ele fala em *conjuntos densos* e *conjuntos contínuos*. Os últimos, explica, são os *conjuntos densos* que satisfazem o axioma de Dedekind. Segundo nosso autor:

> O conjunto dos pontos de uma reta e o dos números reais são contínuos, porque verificam as proposições O1, O2, O3, D1, Δ. O conjunto dos números racionais é denso mas não contínuo, pois não verifica D1.
>
> As sequências discretas verificam D1, mas não são contínuas, pois não verificam Δ.[16]

---

[13] Esse livro resulta de um outro trabalho do mesmo autor, o artigo *The Continuum as a Type of Order*, publicado em 1905, em duas partes, no *Annals of Mathematics*. A versão citada por Amoroso Costa refere-se à segunda impressão da segunda edição, publicada originalmente em 1917.

[14] Costa, 118.

[15] Ibid., 117-18.

[16] Costa, 118.

Ao dizer, na passagem acima, que *os conjuntos* são contínuos e que *o conjunto* é denso, acaba dando menos ênfase na conexão entre essas propriedades e o conceito de ordem, mas esse vínculo é logo reestabelecido ao falar que as *sequências* discretas não são *contínuas*. Apesar da "confusão terminológica",[17] o objetivo da seção final do capítulo é mostrar que a ligação entre os conceitos de ordem e continuidade é essencial para a compreensão do último.

Amoroso Costa chama atenção para o fato de só muito recentemente em sua época ter sido estabelecida a dissociação entre as noções de densidade e continuidade,[18] ainda sendo possível encontrar em autores de seu tempo, segundo ele, a concepção errônea de contínuo de Aristóteles: "aquilo que é divisível em partes sempre divisíveis".[19] Ele então menciona Cantor e Dedekind – fazendo referência, em duas notas de rodapés, a trabalhos de ambos[20] – como responsáveis pela teoria abstrata da continuidade, uma noção que antes, explica, "se apoiava mais ou menos explicitamente sobre a de grandeza".[21] E, por isso, acrescenta:

> A teoria que acabamos de expor, fundada sobre a noção de ordem, representa um imenso progresso sobre aquelas em que predomina a intuição geométrica, e com toda a razão B. Russell a considera como uma das realizações mais notáveis da matemática moderna. [22]

Portanto, embora a redação do texto pareça, à primeira vista, descuidada, considerando-se os aspectos acima apontados, é o vínculo entre ordem e continuidade que Amoroso Costa busca, finalmente,

[17] A confusão inexiste se considerarmos as expressões "conjunto contínuo" e "conjunto denso" abreviaturas de "conjunto ordenado contínuo" e "conjunto ordenado denso", respectivamente, mas, aparentemente, Amoroso Costa julgou desnecessário explicitar isso em seu texto.

[18] Bertrand Russell (1872-1970) se refere à identificação das duas noções como uma concepção antiga de continuidade. Em sua obra *Principles of Mathematics* (1903), ele as associa temporariamente, para, em seguida, criticar tal conexão: "No último capítulo da Parte III, concordamos provisoriamente em chamar uma série de contínua se ela tivesse um termo entre quaisquer dois. Essa definição geralmente satisfez Leibniz e teria sido considerada suficiente até as descobertas revolucionárias de Cantor. No entanto, havia motivos para supor, antes da época de Cantor, que uma ordem superior de continuidade é possível. Pois, desde a descoberta dos incomensuráveis na Geometria [...] era provável que o espaço tivesse uma continuidade de ordem superior à dos números racionais, que, no entanto, têm o tipo de continuidade definido na Parte III. O tipo que pertence aos números racionais e consiste em ter um termo entre quaisquer dois, concordamos em chamar de compacidade; e para evitar confusão, nunca mais falarei desse tipo como continuidade". Bertrand Russell. *Principles of mathematics* (reimpressão, Abingdon: Routledge, 2010), 290.

[19] Amoroso Costa cita a definição de contínuo do tratado aristotélico *Do Céu* (referido nos rascunhos e livro como *De coelo*). A citação não fazia ainda parte do texto na primeira versão, aparecendo como uma dentre as várias notas registradas nos versos das folhas do rascunho 1.

[20] Esses trabalhos são *Stetigkeit und irrationale Zahl*en (1872), de Richard Dedekind (1831-1916), e *Beiträge sur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895), de Cantor.

[21] Costa, 119.

[22] Ibid.

enfatizar,[23] apresentando a continuidade como uma propriedade das relações de ordem linear que verificam os axiomas D1 e Δ.

A célebre prova de Cantor da não-enumerabilidade do contínuo, mostrando que o conjunto de todas as frações decimais ilimitadas no intervalo $(0,1)$ não é enumerável, completa a exposição da última seção, assim como um exemplo de que a propriedade da não-enumerabilidade não implica a da densidade:

> A condição de não-enumerabilidade não implica, ao contrário do que pode parecer, a de densidade. Eis aqui um exemplo de conjunto que se demonstra não ser enumerável nem denso: Tomemos um segmento de reta, marquemos sobre ele as extremidades do terço central, e excluamos esse terço; repitamos a operação nos dois segmentos conservados, e suponhamos que ela é continuada indefinidamente. O conjunto, a que aludimos, compõe-se de todos os pontos de divisão e de todos os pontos não excluídos, na sua ordem natural ao longo do segmento primitivo.[24]

A Figura 1 ilustra o procedimento descrito acima e o conjunto resultante, que não é denso para a ordem natural dos pontos que compõem o segmento e, supostamente, não-enumerável (ele não fornece uma justificativa para isso). Novamente a terminologia utilizada por Amoroso Costa encerra certa confusão, pois uma vez que a densidade não é uma propriedade que diz respeito aos conjuntos, mas às relações de ordem que sobre eles se definem, o exemplo pretende mostrar que sobre esse conjunto, que não possui o atributo da enumerabilidade, é possível definir uma relação de ordem a qual não se aplica a propriedade da densidade.[25] Com o exemplo, conjecura-se que nosso autor quisesse mostrar que é falsa a recíproca de "se um conjunto ordenado é contínuo, então esse conjunto é não-enumerável", considerando que a densidade é uma propriedade necessária para a continuidade.

[23] A conexão entre os dois conceitos pode ter sido um dos motivos que levaram Amoroso Costa a desistir de publicar um capítulo que aparece entre os manuscritos, em que discute a noção matemática de grandeza. Para detalhes, ver Rodrigo Rafael Gomes, "A grandeza sai de cena: a história do capítulo que Amoroso Costa decidiu não publicar", *Revista Brasileira de História da Ciência* 17, nº 2 (jul.-dez, 2024): 662-684, https://doi.org/10.53727/rbhc.v17i2.895.

[24] Costa, 120.

[25] A expressão "conjunto não-denso" pode sugerir um conjunto sobre o qual não se pode definir uma relação de ordem densa, mas não é isso que o exemplo pretender ilustrar.

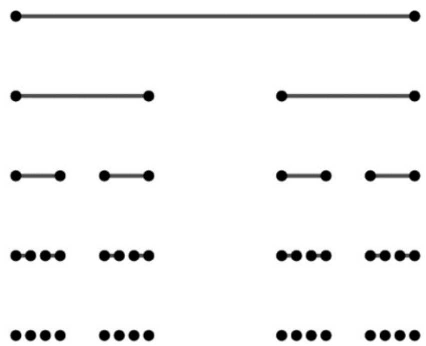

Figura 1: Ilustração do processo de construção do conjunto de pontos descrito por Amoroso Costa.[26]

O CAPÍTULO IX SEGUNDO SEUS MANUSCRITOS

De acordo com o rascunho 1, os capítulos IX e X comporiam, originalmente, um só capítulo intitulado *A noção de ordem*. Nesse mesmo documento, temos o registro da decisão de dividi-lo em dois capítulos (Figura 2), onde o segundo trataria dos números transfinitos de Cantor, mudança implementada na segunda versão.

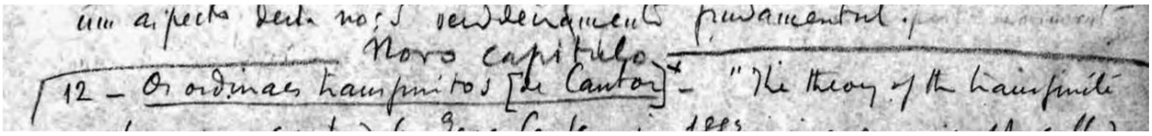

Figura 2: Rasura feita por Amoroso Costa no rascunho 1, indicando sua decisão de colocar a então seção 12, intitulada *Os ordinais transfinitos de Cantor*, em um novo capítulo.[27]

Uma diferença significativa dos rascunhos em relação à versão publicada do texto é a existência de uma pequena introdução que precede a apresentação dos axiomas de ordem linear. No livro, essa introdução não existe, o capítulo começando com a definição de conjunto linearmente ordenado: "Dado um conjunto K, suponhamos que nele se introduz, de elemento a elemento, uma relação $\prec$, caracterizada pelos seguintes postulados, onde a, b, c representam elementos quaisquer de K".[28]

A introdução formulada para a primeira versão do capítulo não é a mesma que foi colocada na segunda versão[29], porém um parágrafo permaneceu, com pequenas alterações, em ambas as versões. No

[26] Elaboração própria.
[27] Manuel A. Costa, *Manuscritos do trabalho 'Idéias Fundamentais da Matemática'* (Rio de Janeiro: MAST, s.d.), 146, http://zenith.mast.br (acessado em 17 de julho de 2022).
[28] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 109.
[29] Considerando as rasuras feitas no rascunho 2, que indicam alterações que ainda seriam feitas na redação do texto, o capítulo começaria da seguinte forma:

"Na construção lógica da Matemática, a noção de ordem assume uma importância relevante, tão grande como a de número.

Ordenar um conjunto, é por assim dizer construir uma cadeia ou uma rede com os seus elementos. A estrutura que se obtém pode variar segundo o que Cantor chama os *tipos de ordem*.

rascunho 1 está registrado: “O *elo* simples que se encontra em todos os tipos de ordem, o que constitui a essência da noção de ordem, é uma relação binária (i.e. entre dois elementos) transitiva e assimétrica, que representaremos pelo símbolo não-definido $<$”.[30] E no rascunho 2 temos: “O elo simples, que se encontra em todos os tipos de ordem, é uma relação entre dois elementos, que representaremos pelo sinal $\prec$”.[31]

Uma alteração importante que se percebe na comparação entre esses fragmentos é a substituição do símbolo “$<$” por “$\prec$”. O primeiro é empregado ao longo da discussão do rascunho 1, que contém a observação “substituir $<$ por $\prec$” logo abaixo do parágrafo citado acima (Figura 3).

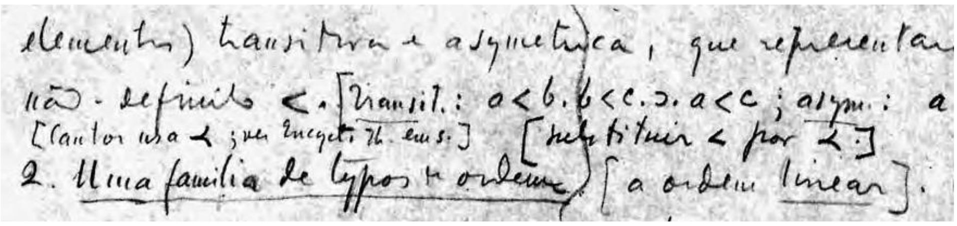
elementos) transitiva e asymetrica, que representar
não - definido $<$. [Transit.: $a<b . b<c . \supset . a<c$; asym.: a
[Cantor usa $\prec$; ver Encycl. Th. ems.] [substituir $<$ por $\prec$.]
2. Uma familia de typos de ordem) [a ordem linear].

Figura 3: Fragmento do rascunho 1 contendo observação entre colchetes onde Amoroso Costa registrou sua intenção de substituir um símbolo por outro.[32]

Nota-se na Figura 3 que a observação sobre a alteração na simbologia foi inserida entre o fim daquele parágrafo e o início da seção 2 (intitulada *Uma família de tipos de ordem*), acomodada entre duas linhas. Isso mostra que a opção pela substituição foi feita após a conclusão do texto, o que explica porque Amoroso Costa usa “$<$” ao longo de toda a primeira versão.

Também se percebe na figura acima a anotação, entre colchetes, “Cantor usa $\prec$; ver Encycl. Th. ems.”. A abreviatura “Encycl.” se refere à obra *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*.[33] É provável que se trate do tomo 1, volume 1, que contém um artigo de Arthur M. Schoenflies (1853-1928) e René-Louis Baire (1874-1932), intitulado *Théorie des Ensembles*. Desse modo, o que parece ser a letra “m” no registro acima seria, na verdade, um “n”. Nesse artigo, citado novamente ao longo do manuscrito, os autores de fato usam o símbolo “$\prec$” na discussão sobre conjuntos ordenados, mas não

Dois exemplos intuitivos podem ser úteis, antes de começar a analisar essa noção. Os pontos de uma reta e os pontos de um círculo se dispõem, respectivamente, segundo dois tipos de ordem muito diferentes. No primeiro caso, que é o da ordem linear, um elemento dado está *antes* ou *depois* de outro elemento dado, em um sentido escolhido de percurso; esse elemento pode estar ou não *entre* dois outros. No segundo caso, que é o da ordem circular, essas relações não existem mais, e são substituídas por outras. É dos fatos desse gênero que vamos estudar a interpretação abstrata.”
Manuel A. Costa, *Manuscritos do trabalho ‘Sobre a Concepção da Matemática Pura’* (Rio de Janeiro: MAST, s.d.), 134, grifos do autor, http://zenith.mast.br (acessado em 17 de julho de 2022).

[30] Costa, *Manuscritos de ‘Idéias Fundamentais’,* 132.

[31] Costa, *Manuscritos de ‘Concepção da Matemática Pura’*, 134.

[32] Costa, *Manuscritos de ‘Idéias Fundamentais’,* 132.

[33] Editada por Jules Molk, a *Encyclopédie* era a versão francesa da *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, esta organizada por Felix Klein e Wilhelm F. Meyer.

mencionam o seu emprego por Cantor, o que sugere que Amoroso Costa deve ter conferido o trabalho original deste, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. [34]

Embora, conforme destacado acima, o uso do símbolo “$<$” seja generalizado ao longo da primeira versão do texto, o “sinal de Cantor” aparece em várias notas registradas nos versos das folhas do manuscrito. São notas contendo trechos de trabalhos de outros autores, a maioria do artigo *The Continuum as a Type of Order* (Figura 4) do matemático Edward V. Huntington, já mencionado, que adota o segundo símbolo em sua exposição. [35]

Não se encontra no manuscrito uma justificativa para a mudança de um sinal para o outro. Conjectura-se que o motivo seja a utilização, previamente no livro, do primeiro símbolo com um sentido mais restrito do que o do segundo. No capítulo *VIII – A generalização algébrica da noção de número* e no manuscrito deste,[36] o sinal “$<$” denota relações de ordem particulares definidas sobre os sistemas numéricos (dos naturais, inteiros e racionais), assim o emprego posterior do mesmo símbolo para representar relações de ordem em geral poderia soar confuso ao leitor.[37]

O artigo de Huntington foi a principal referência de Amoroso Costa na composição de seu texto. As definições e exemplos foram quase todos apropriados do trabalho do estadunidense. A definição de ordem linear, conforme indicado no rascunho 1 (Figura 5), foi emprestada de Huntington e do também americano John W. Young (1879-1932). [38] A diferença entre esses dois autores está apenas na notação (o primeiro, por exemplo, denota o conjunto ordenado por K; o segundo o designa C, usando “$<$” para a relação), embora Young tenha, ele próprio, se baseado em Huntington. [39]

[34] Ou, pelo menos, a tradução francesa desse trabalho, publicada em 1899 por Francisque Marotte (1873-1945). O original e a tradução são citados por Amoroso Costa no capítulo IX da versão publicada.

[35] O tomo 2 da obra *Les Principes de l’Analyse Mathématique*, de Pierre Boutroux (1880-1922), também aparece entre essas citações. Um fragmento foi traduzido por Amoroso Costa (citações em francês no rascunho 1 raramente são traduzidas): “Diz-se que um conjunto é *ordenado* se se pode estabelecer uma ordem entre seus elementos. Mais precisamente, supõe-se que sendo dado dois elementps quaisquer a, b do conjunto, um deles tem *rang* inferior ao *rang* do outro, – o que se escreverá $a < b$ ou $b < a$ [o sinal $<$ significando aqui simplesmente “que vem antes”]; supõe-se, além disso, que as condições $a < b$ e $b < c$ implicam $a < c$”. Costa, *Manuscritos de ‘Idéias Fundamentais’*, 133, grifos do autor.

[36] No rascunho 1, esse capítulo era o VII, com o título *As extensões sucessivas da noção de número*.

[37] A mesmo recurso é, aliás, utilizado por Cantor em *Beiträge*, onde “$<$” designa relações de ordem particulares e “$\prec$” representa genericamente uma relação de ordem.

[38] O livro de Young ao qual remete Amoroso Costa é *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry* (New York: The MacMillan Company, 1917).

[39] “Seguimos aqui, de forma geral, o artigo de E. V. Huntington”, diz ele em uma nota de rodapé. Young, 71.

AC.T.3.031
A1/p139

Da memoria de Huntington, The continuum etc.

"Examples of series. .... 3) K = the class of all the points on a square (with or without the points on the boundary), with < defined as follows: let x and y represent the distances of any point of the square from two adjacent sides; then of two points which have unequal x's, the one having the smaller x shall precede, and of the points which have the same x, the one having the smaller y shall precede. In this way all the points of the square are arranged as a simply ordered class. 4) By a similar device, the points of all space can be arranged as a simply ordered class ...." p. 160.

"Examples of systems (K, <) which are not series.
In this section we give some examples of systems (K, <) which are not series because they satisfy only two of the three conditions expressed in postulates 1—3. The existence of these systems proves that the three postulates are independent."
......

1) Systems not satisfying postulate 1 (—)
a) Let K be the class of all natural numbers, with < so defined that a precedes b when and only when 2a is less than b.
b) Let K be the class of all human beings, throughout history, with < defined as "ancestor of".
c) Let K be the class of all points (x, y) in a given square, with $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ when and only when x_1 is less than x_2 and y_1 less than y_2.
In all these systems, postulates 2 and 3 are clearly satisfied.

2) Systems not satisfying postulate 2 (—)
a) Let K be the class of all natural numbers with a < b signifying "a less than or equal to b".
b) Let K be any class, with a < b signifying "a is co-existent with b".
Both these systems satisfy postulates 1 and 3.

3) Systems not satisfying postulate 3 (—)
a) Let K be the class of all natural numbers, with < meaning "different from".
b) Let K be a class of any odd number of points distributed at equal distances around the circumference of a circle, with a < b meaning that the arc from a to b, in the counter-clockwise direction of rotation, is less than a semicircle.
c) Let K be a family of brothers, with a < b signifying "a is a brother of b". This relation is not transitive, since from a < b and b < a it does not follow that a < c.
All three of these systems clearly satisfy postulates 1 and 2." p. 163.

Figura 4: Verso de uma das folhas do rascunho 1 do capítulo IX: cópias feitas por Amoroso Costa de trechos do artigo de Huntington.[40]

AC.T.3.031 78 2
A1/p134

(Ver o art. de Huntington; The Continuum as a Type of Order, Annals of Math. Vol 5, ~~1904~~ (1905) p. 151; Ver Young. p. 68)

Figura 5: Anotação referente à definição de conjunto ordenado linearmente apresentada por Amoroso Costa no rascunho 1, onde ele remete ao artigo de Huntington e ao livro de Young.[41]

[40] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 139.
[41] Ibid., 134.

O rascunho 1 é testemunha não apenas das fontes que Amoroso Costa consultou, mas também de sua hesitação quanto à notação a ser utilizada na apresentação da definição de conjunto ordenado. No manuscrito, os três axiomas de ordem estão registrados segundo duas notações diferentes (a de Young e a notação simbólica de Russel e Whitehead em *Principia Mathematica*), além de haver uma nota de rodapé informando que esses axiomas já haviam sido citados no capítulo intitulado *Axiomas e noções primeiras*. Na versão manuscrita desse capítulo, que se tornou o capítulo III do livro publicado, os axiomas de ordem de fato são introduzidos (dessa vez o sinal R designa a relação[42]), como um exemplo de sistema axiomático. Ao lado desse registro, há uma anotação remetendo ao capítulo IX (Figura 6). O exemplo não permaneceu, tendo sido retirado já na segunda versão.

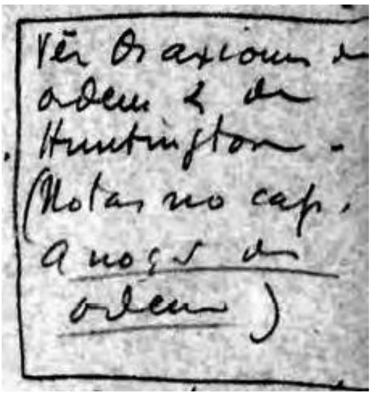
Ver os axiomas de
ordem de
Huntington.
(Notas no cap.
a noç. de
ordem)

Figura 6: Anotação no manuscrito do capítulo III (rascunho 1) sobre os axiomas de ordem de Huntington, a respeito dos quais são apresentadas notas no manuscrito do capítulo IX.[43]

Quanto à terminologia, nota-se que o termo "sequência", empregado por Amoroso Costa como sinônimo de conjunto linearmente ordenado, parece ser uma adaptação de "*series*", palavra que Huntington adota em seu artigo[44] e que este apropriou de Russell.

Não se encontra nos textos dos manuscritos a fonte direta dos exemplos das relações $\prec_1$ e $\prec_2$ definidas sobre o conjunto F dos pares (i, j) de números inteiros positivos. O exemplo fornecido por Huntington envolve uma subclasse de F, a saber, a classe das frações próprias irredutíveis, identificadas com os pares (m, n) de números naturais em que m e n são primos entre si e m é menor do que n. Ele propõe, para essa classe, duas ordens: a usual, em que a fração m/n precede a fração p/q quando o produto mq é menor do que np, e uma ordem "especial" na qual m/n precede p/q quando $n < q$ ou, caso $n = q$, quando $m < p$ (que dá origem à sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ ...).

[42] Notação devida a Russell, conforme registrou Amoroso Costa.
[43] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 51.
[44] Huntington alerta, em uma nota de rodapé, que a palavra não possui, no contexto de seu artigo, o sentido técnico de uma soma de termos numéricos.

Para Huntington, a enumerabilidade é um atributo ordinal, pois enquanto a última relação do parágrafo anterior caracteriza uma série do mesmo tipo da sequência dos números naturais (considerando-se a ordem usual definida sobre essa classe numérica), a primeira, diz ele, constitui um caso particular de uma série "enumerável e densa". "Em toda série deste tipo temos que lidar", expõe mais adiante, "com duas relações seriais: em relação a uma, a classe é densa; em relação à outra, a classe é uma progressão".[45] Assim, do seu ponto de vista, dizer que um conjunto é enumerável significa que é possível definir sobre ele uma relação de ordem do tipo ω.

O exemplo dado por Young também envolve uma subclasse de F, mas não se restringe aos números entre 0 e 1. Ele considera a classe das frações m/n irredutíveis, ordenando-a de duas formas: i) primeiro dispondo as frações de numerador 1, em seguida as de numerador 2, então as de numerador 3 e assim por diante (desse modo, m/n precede p/q quando $m < p$ ou, caso $m = p$, quando $n < q$); ii) escrevendo os elementos em uma configuração retangular na qual as frações de numerador i se situam na i-ésima linha, depois arranjando-as diagonalmente a partir da tabela (Figura 7).

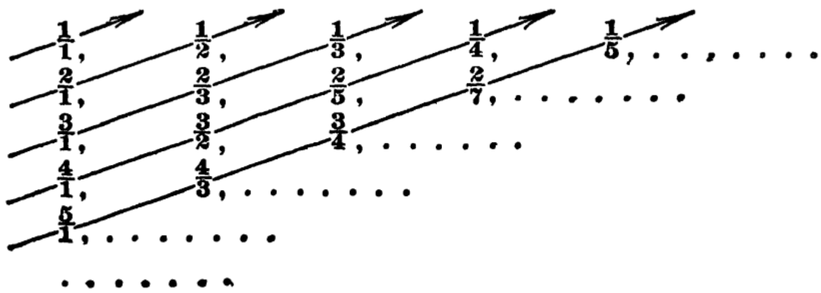

Figura 7: Segunda forma de ordenação proposta por Young para a classe das frações irredutíveis.[46]

Nota-se, pois, o interesse de Young em fornecer exemplos diferentes dos de Huntington. Nenhuma das relações do parágrafo anterior possui a propriedade da densidade, uma discussão postergada para o momento em que o assunto é de fato introduzido. E Amoroso Costa procede da mesma forma em seu texto.

Exceto pelo conjunto dos elementos envolvidos, é evidente a semelhança entre os casos particulares discutidos por Amoroso Costa e os apresentados por Young. Os elementos são ordenados do mesmo modo em $\prec_1$ e i e a lei de formação de $\prec_2$ pressupõe, assim como ii, uma disposição diagonal dos elementos da tabela (arranjo que é indicado graficamente no rascunho 2 do capítulo, conforme Figura 8).

[45] Edward V. Huntington, "The Continuum as a Type of Order: An Exposition of the Modern Theory", *Annals of Mathematics* 6, nº 4 (jul. 1905): 177.
[46] Young, 74.

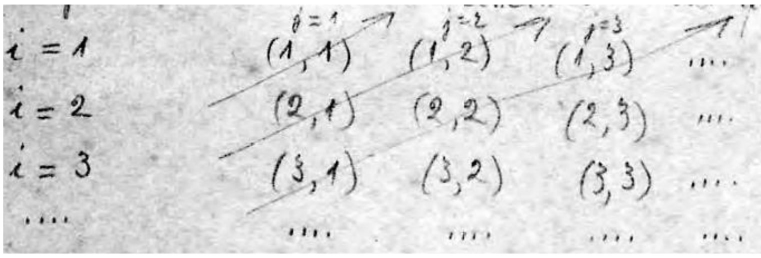

Figura 8: Registro de Amoroso Costa no rascunho 2, indicando através de setas a ordenação diagonal dos elementos do conjunto F a partir da disposição desses elementos em uma tabela.[47]

É possível que Amoroso Costa tenha considerado mais simples pensar nos exemplos dessa forma, sem uma associação direta com as frações, e os manuscritos do capítulo mostram que esse pensamento surgiu ainda na primeira versão do texto e se manteve até a versão final que se encontra no livro.

ORDEM E CONTINUIDADE: AS SEÇÕES 48 A 50 NOS MANUSCRITOS

Conforme exposto anteriormente, os conceitos de discrição, densidade e continuidade são objetos das seções 48 a 50. Seguindo a abordagem inicial do capítulo – cuja principal influência, recordemos, é o artigo de Huntington –, esses conceitos são apresentados como propriedades da ordem linear, expressas na forma de axiomas. Esse formato já se encontra estabelecido no rascunho 1, portanto alterações entre uma versão e outra do capítulo não parecem indicar compreensões diferentes das noções apresentadas.

Um tópico sobre qual nosso autor imprimiu sobre os manuscritos alguma hesitação quanto a sua apresentação é o princípio da recorrência. Inicialmente, conforme encontra-se registrado no rascunho 1, tal proposição seria introduzida como um teorema que se deduz dos axiomas de ordem discreta. O manuscrito contém uma rasura que indica, contudo, que essa formulação não estava, para Amoroso Costa, correta: o princípio da recorrência não seria a denominação do teorema que se deduz dos axiomas, mas um caso particular desse teorema (Figura 9).

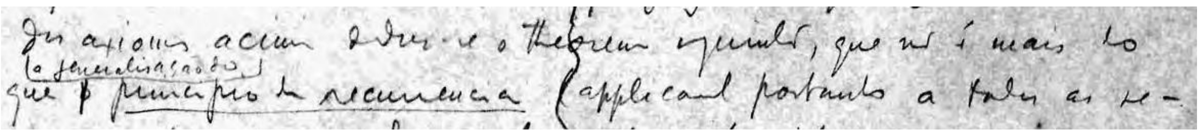

Figura 9: Rasura no rascunho 1: inserção de "a generalização" e risco sobre o artigo "o" antes de "princípio da recorrência".[48]

[47] Costa, *Manuscritos de 'Concepção da Matemática Pura'*, 143.
[48] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 144.

Na mesma folha do manuscrito, ele registrou: “o princípio de recorrência resulta como enunciado particular pelo fato de que a sequência natural dos números inteiros é discreta”.[49] Aparentemente, a fonte dessa observação, que não está no rascunho 2, se baseia em um comentário contido no livro de Young, embora isso não seja mencionado por Amoroso Costa: “A conexão deste teorema com o princípio da indução matemática é óbvia. Este princípio é uma consequência simples do fato de que a sequência dos inteiros positivos 1, 2, 3, ..., n, n+1 ..., forma uma sequência discreta”.[50] Huntington, que é a fonte de seu conterrâneo e do brasileiro, diferente de ambos, chama a mesma proposição de *teorema da indução matemática*. Infelizmente, não se encontra nos manuscritos justificativa para a distinção feita por Amoroso Costa.[51]

Em relação ao tema da continuidade, duas citações chamam atenção entre as anotações contidas no verso da segunda folha do rascunho 1. Aproximadamente no meio da página, Amoroso Costa escreveu “Sobre a intuição geométrica do contínuo:”, reproduzindo abaixo o conteúdo de uma nota de rodapé da segunda edição do livro *Leçons sur la Théorie des Fonctions* (1914), de Émile Borel (1871-1956), na qual este critica a crença, segundo ele sustentada por “muitas mentes excelentes”, de que a noção de continuidade seja dada pela intuição geométrica. Abaixo dessa citação, na mesma página, encontra-se registrada a definição de contínuo de Aristóteles,[52] que foi incorporada ao texto principal na segunda versão e permaneceu na versão final. Aparentemente, Amoroso Costa obteve essa definição do livro *Logique et Mathématiques* (1908), de Arnold Reymond (1874-1958), pois, segundo deixou registrado na mesma nota, ela é citada pelo último.

O caso particular de “conjunto que não é enumerável nem denso” exposto no final do capítulo compõe a segunda versão do texto, mas no rascunho 1 ele está entre os fragmentos do trabalho de Huntington que foram registrados nos versos das folhas, o que mostra que ele foi incorporado ao texto ao longo do processo de produção do capítulo. Na primeira versão, Amoroso Costa simplesmente copiou o exemplo do americano, que fala em “*sequência* que não é enumerável nem densa”, mas no processo de escrita do rascunho 2 ele trocou “sequência” por “conjunto”, que, como vimos, pode ser uma terminologia problemática.

Ao lado da anotação do rascunho 1, há um desenho (Figura 10), mas que é de outro exemplo de Huntington, embora ambos estejam relacionados. O exemplo apresenta um conjunto S formado pelos

[49] Costa, *Manuscritos de ‘Idéias Fundamentais’*, 144.
[50] Young, 78.
[51] Ainda sobre esse tema, Amoroso Costa riscou, no rascunho 2, que o princípio da recorrência é “impropriamente chamado princípio de indução completa”. Costa, *Manuscritos de ‘Concepção da Matemática Pura’*, 147. A mesma observação já se encontra no capítulo IV, desde a primeira versão, assim a sua retirada visava evitar a repetição, embora os motivos pelos quais considerasse a denominação imprópria não tenham sido por ele expressos.
[52] Ver nota 19.

seguintes segmentos, obtidos sucessivamente a partir de um segmento de reta AB: a terça parte central de AB, a terça parte central dos outros dois segmentos de AB, a terça parte central dos outros quatro segmentos de AB e assim por diante (Figura 11).[53] Huntington argumenta que esses segmentos constituem um *conjunto enumerável* e que formam uma *sequência densa*[54] ao longo do segmento de reta AB.[55] Trata-se, pois de uma relação de ordem entre os elementos do conjunto enumerável S que possui a propriedade da densidade.

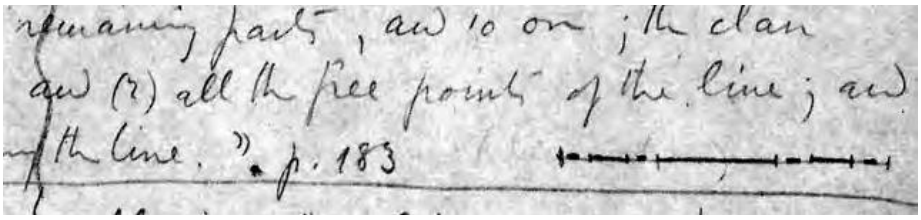

Figura 10: Registro de exemplo de Huntington em um dos versos do rascunho 1 com desenho que representa classe enumerável e densa de segmentos.[56]

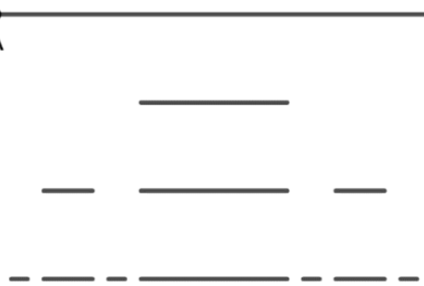

Figura 11: Ilustração do processo de construção do conjunto S.[57]

O exemplo copiado por Amoroso Costa e depois incorporado a seu texto, por outro lado, caracteriza a classe complementar (em relação ao conjunto de pontos de AB) do conjunto dos pontos do interior dos segmentos que são elementos de S (Figura 1). É nítido que a série de pontos dessa classe (segundo a ordem natural dos pontos sobre o segmento AB) não possui a propriedade da densidade, pois, explica Huntington, se a e b são extremidades de um dos segmentos de S (e, portanto, são elementos da

[53] Huntington atribui o mecanismo de formação desse conjunto ao matemático Henry John S. Smith (1826-1883), que o teria apresentado em um trabalho publicado em 1875 nos *Proceedings of the London Mathematical Society*. O título do artigo em questão, não mencionado por Huntington, é *On the Integration of Discontinuous Functions*.
[54] De fato, entre dois segmentos desse tipo, sempre haverá outro.
[55] Huntington, 182.
[56] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 145.
[57] Elaboração própria.

série em questão), não há nenhum elemento da série entre esses pontos. Em relação à não-enumerabilidade desse conjunto, ele fornece apenas um esboço de uma demonstração, uma vez que a prova desse fato, diz, "requer um pouco mais de matemática do que é propriamente assumido" em seu artigo.[58]

Diferente do que a redação dada por Amoroso Costa no exemplo anterior possa sugerir, é a relação de ordem particular definida sobre o conjunto em questão que não possui a propriedade da densidade (o que significa que essa propriedade poderia se aplicar a outra relação de ordem definida sobre o mesmo conjunto). Aparentemente, nosso autor foi influenciado por Young, que emprega as expressões "classes densas" (*dense classes*) e "classes contínuas" (*continuous classes*) em seu livro.

As concepções ordinal e cardinal de número: as seções 44 e 45

O objetivo da seção 44, segunda seção do capítulo IX, é mostrar como se pode estabelecer uma relação de ordem sobre a classe dos números cardinais.

O número cardinal de um conjunto K é inferior ao de um conjunto K', explica Amoroso Costa, quando duas condições são satisfeitas: 1) K é equivalente a um subconjunto próprio ("parte integrante", diz ele[59]) de K' e 2) K' não é equivalente a nenhum subconjunto próprio de K. A segunda condição, assinala, poderia ser suprimida no caso dos cardeais finitos, contudo a sua presença estende a definição aos cardinais infinitos, "caso em que K pode ser ao mesmo tempo equivalente a uma parte de K' e à sua totalidade".[60]

Em seguida, Amoroso Costa observa que é possível demonstrar a equivalência entre os conjuntos K e K' a partir das condições 1 e negação de 2, e conclui que a relação definida satisfaz os postulados de ordem linear:

> Considerando, então, as três relações possíveis entre dois números cardeais a e b: $a = b$, $a < b$, $b < a$, resulta desse teorema que cada uma delas exclui as outras, e que além disso, quando se tem ao mesmo tempo $a < b$ e $b < c$, conclui-se necessariamente: $a < c$.[61]

[58] Huntington, 183.
[59] Borel, no livro *Leçons sur la Théorie des Fonctions* (1898), que foi consultado por Amoroso Costa, emprega a expressão "*partie aliquote*".
[60] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 112. Não se pode deixar de mencionar que esse emprego do termo "parte" de um conjunto contraria a definição de tal conceito dada no capítulo VII, que permite a coincidência entre a parte e o conjunto que a contém: "Se todos os elementos de A pertencem também a B, diz-se que A é *parte integrante* de B. Quando, além disso, todos os elementos de B também pertencem a A, os dois conjuntos são *idênticos*". Ibid., 86, grifos do autor. Ainda no mesmo capítulo, Amoroso Costa apresenta a definição de conjunto infinito como aquele que pode ser colocado em correspondência biunívoca com uma parte de si mesmo, utilizando, como faz acima, o termo com um sentido mais restrito.
[61] Ibid.

Nos rascunhos do texto (não na versão publicada) se encontra a informação de que a proposição acima é o teorema de Berstein,[62] o que também é dito por Young no próprio livro, em uma nota de rodapé.[63] [64]

Na seção seguinte, em uma exposição tão breve como a da anterior, Amoroso Costa chama atenção para o fato de haver dois pontos de vista envolvendo as concepções ordinal e cardinal de número: "Na concepção que acabamos de expor, número e ordem são noções independentes uma da outra. Convém, entretanto, mencionar aqui o ponto de vista segundo o qual se consideram os números como essencialmente ligados à ideia de ordem".[65]

Sob o primeiro ponto de vista, que é o exposto no livro, o conceito de número prescindiria do de ordem porque este não faz parte da definição de número cardinal. Assim, se a existência de uma relação de ordem entre os números cardinais pressupõe a existência desses números, e não o contrário – o que é apresentado na seção anterior –, então o conceito de número não depende do de ordem. A definição de Russell de número cardinal de um conjunto (que Amoroso Costa discute no capítulo VII), como sendo o conjunto de todos os conjuntos equivalentes ao primeiro,[66] mostra exatamente isso, que os números cardinais se definem independentemente uns dos outros, "sem que intervenha a noção da ordem relativa em que eles se possam dispor".[67]

A determinação do número de objetos de uma coleção pela via da contagem traz, no entanto, uma segunda perspectiva: de que o aspecto ordinal do número vem antes do cardinal. E é esse ponto de vista que Amoroso Costa opõe ao anterior na seção 45:

> Os números ordinais, cuja noção alguns matemáticos apresentam como logicamente anterior à dos cardeais, são os elementos de uma sequência de sinais diferentes, convenientemente escolhidos, partindo do sinal primeiro 1, e dispostos de acordo com uma lei que permite determinar o sinal que se segue a um sinal dado.
>
> A ideia do número cardeal de um conjunto se derivará dessa, fazendo-se corresponder sucessivamente cada ordinal, na ordem adotada, a cada elemento do conjunto. Por

[62] Mais conhecido atualmente como teorema de Cantor-Bernstein ou de Cantor-Bernstein-Schröder.

[63] Essa nota menciona que a demonstração do teorema pode ser conferida no livro *Leçons sur la Théorie des Fonctions* (1898), de Borel, ou em *Principles of Mathematics* (1903), de Russell. Esse último, que associa o teorema aos nomes de Bernstein e Schröder, na verdade não fornece prova alguma da proposição, apenas remete à demonstração que se encontra no livro de Borel.

[64] Em relação a esse teorema, Amoroso Costa não cita Young. Encontra-se no rascunho 1 a menção ao livro de Borel e ao artigo de Schoenflles e Baire na *Encyclopédie*.

[65] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 112.

[66] Para detalhes, ver Gomes, *Conjunto, correspondência, número cardinal*.

[67] Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 88.

> definição, o último número empregado é o número cardeal do conjunto, e será representado pelo mesmo sinal.[68]

Esses dois parágrafos estão presentes no rascunho 1, com redação um pouco diferente[69]. Seu conteúdo encerra muitas semelhanças com o de uma passagem do artigo *Principes Fondamentaux de l'Arithmétique*, de autoria de Hermann Schubert (1848-1911), Jules Tannery (1848-1910) e Jules Molk (1857-1914), publicado (assim como o de Schoenflles e Baire) no primeiro volume do tomo 1 da *Encyclopédie*.[70] Esse trabalho é citado mais à frente no manuscrito, com a seguinte observação: "sobre as duas th. do número ver a nota 15) p. 5". A nota aludida por Amoroso Costa diz o seguinte:

> E. G. Husserl, em um apêndice de sua "Philosophie der Arithmetik" [1, Halle 1891, p. 190], critica os ensaios nominalistas de L. Kronecker e H. von Helmholtz. Ele insiste particularmente (1ª parte, p. 3) no fato de que os números cardinais se referem a *conjuntos*, os números ordinais a *sequências*, e que sendo as sequências apenas conjuntos ordenados, o número cardinal precede necessariamente o número ordinal.[71]

De acordo com essa nota, Edmund Husserl (1859-1938) era, pois, um dos adeptos do primeiro ponto de vista e Leopold Kronecker (1823-1891) e Hermann von Helmholtz (1821-1894) pertenciam à segunda corrente.

---

68 Costa, *Idéas Fundamentaes da Mathematica*, 112-13.

69 Escreveu Amoroso Costa na primeira versão de seu texto: "Convém entretanto mencionar aqui outro aspecto da série dos números; aquele em que ela aparece como *números de ordem* ou *números ordinais* [alguns matemáticos consideram a noção de nº ordinal como *anterior* à de número cardeal.] Os números ordinais constituem uma sequência de sinais todos diferentes, arbitrários, com um sinal inicial (um), e cada um deles seguido de outro em uma ordem sistemática que permite especificar o sinal que se segue a um sinal dado. Para passar daí à ideia de número cardeal, é preciso definir o nº cardeal de um conjunto: para isso, faz-se corresponder sucessivamente cada objeto do conjunto a um número ordinal, na ordem que estes se sucedem; o *último* número empregado é o nº cardeal do conjunto, e este será designado pelo mesmo símbolo que o último ordinal empregado." Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 137, grifos do autor.

70 "A sequência natural dos números implica a noção de ordem. Esta noção, considerada primitiva, conduz à noção de número *ordinal*, que é considerada por vários matemáticos como anterior à noção de número cardinal, que, deste ponto de vista, é uma noção derivada. Os números, ou *numerais*, são então vistos como uma série de sinais diferentes, aliás arbitrários. Esta sequência tem um primeiro sinal, o número um. Cada número é seguido por outro número, diferente de todos os que o precedem; cada número é precedido por outro número, exceto o primeiro número. [...] Para obter o número cardinal de uma coleção, numeramos sucessivamente cada objeto da coleção em uma ordem determinada, atribuindo sucessivamente aos diferentes objetos os números da sequência natural. O *último* número utilizado é o número *cardinal* da coleção; nada impede que seja designado pelo mesmo sinal do último número utilizado." Hermann Schubert, Jules Tannery & Jules Molk, "Principes Fondamentaux de l'Arithmétique", in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. 1, vol. 1, ed. Jules Molk (reimpressão, Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1992), 4-5, grifos dos autores.

71 Ibid., 5, grifos dos autores.

Um nome que se somava a Husserl na polêmica era Louis Couturat (1868-1914). Este discute a questão no livro *Les Principes des Mathématiques* (1905),[72] que é citado por Amoroso Costa nos manuscritos da primeira versão do capítulo IX. Para o autor francês, a definição do número cardinal pela operação de contagem encerra um círculo vicioso, pois contar uma coleção de objetos é fazer corresponder, um a um, esses objetos aos inteiros sucessivos de 1 a n, onde n é o número cardinal do conjunto de inteiros de 1 a n, o que pressupõe a própria noção de número cardinal e a relação de ordem atribuída à sequência natural dos números.[73]

Outra dimensão da discussão sobre os aspectos ordinal e cardinal do número abordada por Couturat na mesma obra diz respeito às duas maneiras pelas quais os números cardinais podem ser definidos. Uma nota de rodapé no rascunho 1 mostra que a questão não passou despercebida a Amoroso Costa: "É preciso porém distinguir entre uma *teoria ordinal do número cardeal* (como é a de Peano) e uma teoria do número em que a concepção ordinal precede a concepção cardeal".[74]

Embora Couturat não seja citado na nota anterior, é bem provável que o livro do francês seja a fonte da observação encontrada no rascunho 1, como sugere a seguinte passagem daquele livro:

> [...] os próprios números cardinais podem ser apresentados e definidos de duas maneiras diferentes: podemos concebê-los como independentes e isolados uns dos outros, ou construí-los sucessivamente pela adição repetida da unidade a si mesma; nesse último caso, eles formam o que se chama de *sequência natural dos números*. Designaremos a primeira concepção sob o nome de teoria *cardinal*, em oposição à segunda, que merece o nome de teoria *ordinal*.[75]

Na abordagem axiomática de Peano – que contém a ideia de número cardinal, juntamente com as de zero e sucessor, como um conceito primitivo –, os números são obtidos a partir de zero pela aplicação repetida da função sucessor. Embora esse processo leve à formação da sequência natural dos números, estabelecendo uma relação de ordem entre esses objetos, eles não são definidos pela sua posição na sequência. Assim, essa abordagem compreende, conforme assinalado por Amoroso Costa na nota acima, a teoria ordinal do número cardinal (não o aspecto ordinal do número). A teoria cardinal do número cardinal,

[72] Esse livrou resultou de uma tentativa de revisão de *Principles of Mathematics*, de Russell, por isso tem, em francês, o mesmo título do último. Para detalhes, ver Gomes, *A grandeza sai de cena*.
[73] Tal argumento, conforme indicado por Couturat, é utilizado por Russell na defesa do primeiro ponto de vista.
[74] Costa, *Manuscritos de 'Idéias Fundamentais'*, 137, grifo do autor.
[75] Louis Couturat, *Les Principes des Mathématiques*: *avec un Appendice sur la Philosophie des Mathématiques de Kant* (reimpressão, Paris: Albert Blanchard, 1980), 45, grifos do autor.

por outro lado, corresponde à teoria russelliana do número, que se baseia nos conceitos lógicos de classe e relação para definir o conceito geral de número cardinal.

Mesmo que tenha desistido de mencionar a distinção feita por Couturat entre as teorias ordinal e cardinal do número, a passagem seguinte, contida no rascunho 2, mostra que a consideração da discussão acima ainda não tinha sido inteiramente descartada por Amoroso Costa quando da escrita da segunda versão de seu livro:

> Pode-se construir um desenvolvimento da matemática na base do qual se encontre o termo “número” representando uma ideia primitiva e não-definida. Tal é, por exemplo, a exposição axiomática da aritmética, no *Formulario Mathematico* de Peano [...], construída sobre as ideias primitivas de *número cardeal*, *zero* e *o seguinte de*, ligadas entre si por cinco proposições primitivas.
>
> Pode-se, porém, levar adiante a análise e procurar definir o número em termos de noções mais propriamente lógicas. A definição de Russell [...] se funda sobre os conceitos de conjunto ou classe e de correspondência.[76]

Esse fragmento é de uma seção escrita para o capítulo VII, que não foi inserida na versão final. Aqui, há uma referência às duas teorias do número cardinal, que se conectaria com a nota do rascunho 1 caso esta tivesse permanecido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo compõe um projeto de pesquisa de caráter histórico-analítico que tem como propósito entender a natureza das ideias e os pressupostos dos estudos matemáticos de Manuel Amoroso Costa, considerando-se, para tanto, os manuscritos contidos em seu arquivo pessoal.

As questões abordadas neste trabalho não poderiam ter sido formuladas tendo por base apenas a versão final, editada e publicada, do livro *As Ideias Fundamentais da Matemática*. Essas questões foram possíveis graças aos documentos atinentes ao processo de elaboração do livro, cuja análise em conjunto com a obra revelou as influências do autor e possibilitou formular hipóteses a respeito de suas intenções.

É importante assinalar que se os rascunhos do livro tivessem desaparecido, não saberíamos que ele não contém todos os assuntos que o autor pretendia discutir inicialmente. Sem acesso aos manuscritos, provavelmente não fosse possível determinar todos os autores nos quais ele se baseou em sua elaboração, tendo em vista que muitas de suas referências foram omitidas na versão que veio a público.

[76] Costa, *Manuscritos de ‘Concepção da Matemática Pura’*, 108-9, grifos do autor.

Embora a maioria dos autores consultados por Amoroso Costa no processo de composição do capítulo aqui abordado seja francesa – o que se justifica considerando a influência cultural da França sobre nosso país na época[77] –, vimos que a única referência extensamente utilizada por ele foi um trabalho de Edward V. Huntington. Este era um nome de destaque em um movimento de pesquisa matemática nos Estados Unidos que, nas primeiras décadas do séxulo XX, tinha como foco a axiomatização de divervos ramos da matemática e investigações de cunho metamatemático.[78] Sabe-se que outros trabalhos nessa linha foram consultados pelo brasileiro na elaboração de outros capítulos de seu livro,[79] assim ele parecia ter um interesse particular pelo tema e o considerava obrigatório na exposição das ideias fundamentais da matemática.

Ressalta-se, finalmente, a importância dos estudos históricos voltados para a análise dos manuscritos dos cientistas, considerando que os processos de elaboração de textos são uma dimensão intrínseca da atividade científica. Mais do que meras testemunhas dos erros e esforços dos autores no percurso de produção de suas obras, as rasuras contidas naqueles documentos exprimem um pouco do embate experimentado pelos cientistas enquanto escrevem (e refletem) sobre os temas que irão divulgar, uma luta travada por todo escritor, que, conforme advogam Pino e Zular,[80] "vai procurar forma e algum tipo de solução no papel".

SOBRE OS AUTORES:

Rodrigo Rafael Gomes
rodrafagomes@ifsp.edu.br
Instituto Federal de São Paulo

Artigo recebido em 21 de agosto de 2024
Aceito para publicação em 22 de abril de 2025

Todo conteúdo desta revista está licenciado em Creative Commons CC By 4.0.

[77] Hugo Rogelio Suppo, "A política cultural da França no Brasil entre 1920 e 1940: o direito e o avesso das missões universitárias", *Revista de História*, nº 142–143 (2000): 309-345.
[78] Michael Scanlan, "Who were the American Postulate Theorists?", *The Journal of Symbolic Logic* 56, nº 3 (sep. 1991): 981-1002.
[79] É o que é mostrado, por exemplo, em Rodrigo Rafael Gomes, "Amoroso Costa e os postulados de Veblen para a geometria euclidiana", *in Ensino de matemática e ciências: temas para reflexão*, org. Rafael Prearo Lima & Rodrigo Rafael Gomes & Rubens Pantano Filho (Salto, SP: Fox Tablet, 2022): 25-38.
[80] Claudia Amigo Pino & Roberto Zular, *Escrever sobre Escrever: uma Introdução Crítica à Crítica Genética* (São Paulo: WMF Martins Fontes, 2007), 144.